

معادلات و مقدمات تحلیل عاملی:

فرضیه: فرض کنید $\underline{x}_{p \times 1}$ یک بردار تصادفی با میانگین $\underline{\mu}$ و واریانس Σ باشد. در این صورت می‌توانیم مدل K عاملی ($K < P$) برای بردار تصادفی $\underline{x}$ به صورت زیر بنویسیم:

$$\underline{x} = \underline{\Lambda} \underline{f} + \underline{u} + \underline{m}$$

که در آن $\underline{\Lambda}_{p \times K}$ ماتریس بارها، $\underline{f}_{K \times 1}$ فاکتورهای مشترک، $\underline{u}_{p \times 1}$ بردار تصادفی اند. مولفه‌های $\underline{f}$ را عامل‌ها، مشترک و مولفه‌های $\underline{u}$ را عامل‌های خاص (خاص) گویند. مدل ریاضی فوق (مدل عاملی) دارای شرایط زیر است:

عامل‌ها ناهمبسته اند: $\rightarrow$

$$I) \text{Var}(\underline{f}) = \underline{I}_{K \times K}, \quad E(\underline{f}) = \underline{0}_K$$

$$II) \left\{ \begin{array}{l} \text{Var}(\underline{u}) = \underline{\Psi} = \text{diag}(\psi_{11}, \dots, \psi_{pp}) \text{ معکوس} \\ E(\underline{u}) = \underline{0} \\ \text{Cov}(u_i, u_j) = 0 \quad (i \neq j), \quad \text{Var}(u_i) = \psi_{ii} \end{array} \right.$$

$$III) \text{Cov}(\underline{f}, \underline{u}) = \underline{0}_{K \times P}$$

$$x_i = \sum_{j=1}^K \lambda_{ij} f_j + u_i + m_i \quad i=1, \dots, P$$

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_K \end{pmatrix}, \quad \underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1K} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{i1} & \dots & \lambda_{iK} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{P1} & \dots & \lambda_{PK} \end{pmatrix}$$

✓ فرض کنید نمونه ارباب x_1 و نمونه ریاضیات x_2 و نمونه زبان دانش x_3 بایر دوم در یک دوره خاص باشند.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.183 & 0.178 \\ 0.183 & 1 & 0.17 \\ 0.178 & 0.17 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{f} = \underline{f}$$

که در آن فاکتورهای مشترک زیر است.

$$p=3, K=1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda_1 F + u_1 + m \\ x_2 = \lambda_2 F + u_2 + m \\ x_3 = \lambda_3 F + u_3 + m \end{cases}$$



با فرض برقراری مدل عامی می توان نوشت:

$$\text{Var}(\underline{x}) = \text{Var}(\underline{\Lambda} \underline{F} + \underline{u} + \underline{1}m) = \underline{\Lambda} \text{Var}(\underline{F}) \underline{\Lambda}' + \text{Var}(\underline{u})$$

$$\rightarrow \underline{\Sigma} = \underline{\Lambda} \underline{\Lambda}' + \underline{\Psi}$$

$$\sigma_{ii} = \sum_{j=1}^K \lambda_{ij}^2 + \psi_{ii} \quad i=1, \dots, p$$

همانگونه که ملاحظه می شود واریانس σ_{ii} یعنی $\sum_{j=1}^K \lambda_{ij}^2$ را با h_i^2 نشان داده و عامل اثرات می نامند. و قسمت دیگر همان ψ_{ii} است واریانس خاص می نامیم.

$$\sigma_{il} = \text{Cov}(x_i, x_l) = \sum_{j=1}^K \lambda_{ij} \lambda_{lj}$$

$$r_{il} = \frac{\sigma_{il}}{\sqrt{\sigma_{ii} \sigma_{ll}}} = \frac{\sum_{j=1}^K \lambda_{ij} \lambda_{lj}}{\sqrt{\sigma_{ii} \sigma_{ll}}}$$

به طور مشابه می توان $\text{Cov}(\underline{x}, \underline{F})$ را نیز محاسبه نمود

$$\text{Cov}(\underline{x}, \underline{F}) = \text{Cov}(\underline{\Lambda} \underline{F} + \underline{u} + \underline{1}m, \underline{F}) = \underline{\Lambda} \text{Cov}(\underline{F}, \underline{F}) + \text{Cov}(\underline{u}, \underline{F}) \rightarrow \underline{\Lambda} + \underline{0} = \underline{\Lambda}$$

$$\rightarrow \text{Cov}(x_i, F_j) = \lambda_{ij}$$

فرض کنید $\sigma_{ii} = \sigma_{ll} = 1$ و مجموعه λ را در Λ مداخل علی با سه عامل به صورت زیر
فازیس Λ (ضریب 1) باشد

	f_1	f_2	f_3
x_i	λ_{i1}	λ_{i2}	λ_{i3}
x_l	λ_{l1}	λ_{l2}	λ_{l3}

الف) ضریب همبستگی بین x_i و x_l را بیابید.

ب) مقادیر واریانس اشتراکی و خاص را برای متغیرها x_i و x_l را می سنجید.

$$\rho_{il} = \frac{(\lambda_{i1} \times \lambda_{l1}) + (\lambda_{i2} \times \lambda_{l2}) + (\lambda_{i3} \times \lambda_{l3})}{\sqrt{1 \times 1}} =$$

$$h_{ii}^2 = (\lambda_{i1})^2 + \dots + (\lambda_{i3})^2 = 0.1713 \quad (\sigma_{ii}^2 = h_{ii}^2 + \sigma_{ii}) \quad \text{ب)}$$

$$\sigma_{ii} = \sigma_{ii}^2 - h_{ii}^2 = 1 - 0.1713 = 0.8287$$

$$\sigma_{ll} = 0.1713$$

تذکره: توجه داشته باشید که در مدل علی، مقیاس یاب است و می مجموعه های عاملی (فازیس Λ)
و واریانس خاص (σ_{ii}) تغییر می کنند و یکسان نیستند. به عنوان مثال:

$$x = \Lambda f + u + m$$

اگر مدل عاملی برای x به شکل زیر باشد باید در نظر گرفت:

فازیس C مدل عاملی برای Cx به صورت زیر خواهد بود:

$$C = \text{diag}(c_1, \dots, c_p)$$

$$Cx = (C\Lambda)f + Cu + Cm$$

برابر اصل فعل فوق فاعله مؤنثه اصلی به جای فاعلی که در زبان فارسی باید از فاعلین جمع است یعنی اشاره کنیم

در صورتی که فاعلین معقود $G_{K \times K}$ وجود داشته باشد بتوان نوشت

$$X = (\wedge G') (G' P) + u + m$$

$\rightarrow f^*$

$$\Rightarrow \Sigma = \wedge G' G \wedge + \psi = \wedge \wedge + \psi$$

حال با توجه به اینکه عوامل f با فاعلین معمولی $\wedge$ و عوامل f^* با فاعلین معمولی $G \times M$ برآهر فاعلین معقود G معادل خواهند شد لذا چهار مشکل می شود زیرا این فاعلین با هیچ یک از این دو وجود ندارد در اصل این مشکل یک راه حل ممکن این است که $\wedge$ صرفاً نظائر عوامل معمولی باشد برای آنکه منحصراً به فاعلین $\wedge$ کافی است که $\wedge$ و $\wedge'$ و $\wedge''$ و $\wedge'''$ عناصری که به صورت تدریجی مرتب شده باشند این مورد را به منظور برآورد منحصراً فرد یا رافعهای در اصل عاملی یعنی در آنجا فاعلین $\wedge$ است و $\wedge'$ است.

توضیح: به طوری ضرب عاملها در آنجا فاعلین معقود به عنوان چرخش عاملی شناخته می شود و بدین منظور این کافی شود که رابطه بین متغیرها و عاملها به جدا شده و نهایتاً تفسیر عاملی حاصل شده شود از طریق چرخش عاملها بهترین ترتیب آنها را صادر عاملی می باشد که در هر یک از چرخش عاملها تحول صادر عاملی به یک صادر شده است که بر اساسی بتواند مورد تفسیر قرار گیرد به بیان دیگر تفسیر عاملها فاعلین چرخش یافته (در آن یافته) بسط داده شود تفسیر عاملها فاعلین دورا یافته است. در حالت کلی نوع چرخش وجود دارد:

الف) دوران معاد :

این نوع دوران با ضرب فاکتور معمولی ها عاملی در یک فاکتور معاد حاصل می شود در این نوع دوران عوامل را محاسبه خواهند شد.

ب) دوران متناظر :

این نوع دوران با ضرب فاکتور معمولی ها عاملی در فاکتور نیست نه لازم است معاد باشد حاصل می شود عوامل بدست آمده در این نوع دوران محاسبه نخواهند شد.

از جمله دوران ها معاد می توان به دوران vari max و quart max و در این روش اشاره کرد.

چشم چین دوران ها promax و oblimin قابل همبستگی خاص ها معاد یا قابل هستند

ج) یادکرد

در این قسمت می خواهیم $\hat{\Lambda}$ و $\hat{\Lambda}^2$ را با جداول تقریب از روابط زیر بدست آوریم :

$$P, \dots, 1 \rightarrow \hat{\Lambda}^2 = \sum_{j=1}^K \hat{\Lambda}_j^2 + \hat{\Psi} \rightarrow S = \hat{\Lambda} \hat{\Lambda}' + \hat{\Psi}$$

حل با توجه به این مجموعه ها در این فاکتورهای اختصاصی معیاس یابی کنید تا همواره به درستی معادها را

استاندارد نمونه و سپس از مدل عاملی استفاده کنیم پس باید رابطه ی فوق را به شکل زیر باز نویسی

$$R \approx \hat{\Lambda} \hat{\Lambda}' + \hat{\Psi} \rightarrow \hat{\Psi}_{11} = 1 - \sum_{j=1}^n \hat{\Lambda}_j^2$$

الون معادله فوق را مورد بررسی می رانی هم در حالات مختلف را به صحت است قابل حل باشد بررسی می کنیم

قابل حل بودن یا نبودن معادلات فوق بستگی به مقدار K دارد که در ادامه آن را معرفی خواهیم کرد.

تعداد محدودی ها - تعداد پارامترها $df =$

$$\rightarrow \frac{P(P+1)}{2} - \left[PK + P - K(K-1)/2 \right] \rightarrow \frac{1}{2} (P-K)^2 - \frac{1}{2} (P+K)$$

$$S = \Lambda \Lambda' + \Psi$$

حالت اول: $df < 0$ (در این صورت تعداد پارامترهای مدل عاملی در نتیجه می نهایت جواب برد $\hat{\Lambda}$ و $\hat{\Psi}$ بدست می آید و لذا در این حالت نمی توان $\hat{\Lambda}$ و $\hat{\Psi}$ را برآورد نمود.

حالت دوم: $df = 0$ در این صورت تعداد پارامترها مدل عاملی و تعداد معادلات برابر بوده و لذا معادله های عاملی توان به شکل واقعی بر حسب $\hat{\Lambda}$ و $\hat{\Psi}$ حل نمود ولی باید توجه داشت که در این حالت مدل K عاملی فرض اولیه می $\chi^2 = \text{Var}(x)$ را ساده می کند.

حالت سوم: $df > 0$ در این صورت تعداد پارامترها مدل عاملی از تعداد معادلات کم بوده و در نتیجه نمی توان $\hat{\Lambda}$ و $\hat{\Psi}$ را از حل معادله های فوق به طور قطعی بدست آورد ولی به طور تقریبی می توان این کار را به صورت زیر انجام داد. برای بدست آوردن جواب ها تقریبی معمولاً از روش زیر استفاده می شود:

۱- تحلیل عاملی اصلی: در این روش مدل K عاملی واقعی مورد بررسی قرار می گیرد در $df > 0$ باشد هم چنین

در این روش ششدهای استاندارد شده یعنی فاکتورس همبستگی را مورد بررسی قرار می دهیم

در این روش یک برآورد مقدماتی برای طریای اشتراکی شکل زیر در نظر می گیریم

$$h_i^v = 1 - \psi_{ii} \rightarrow \max |r_{ij}| \rightarrow j \neq i$$

$$R - \tilde{\Psi}$$

این عبارت فوق را به صورت فاکتورس قبولیم، نتیجه می شود:

که این فاکتورس را به تصحیح همبستگی گویند حال تصحیح فاکتورس همبستگی یعنی $R - \tilde{\Psi}$ را طبق

تجزیه جوردن به شکل زیر تجزیه می کنیم:

$$R - \tilde{\Psi} = \sum_{i=1}^p a_i \underline{g}(u) \underline{g}'(u)$$

که در آن a_i ها مقادیر دشره و $\underline{g}$ ها بردارهای دشره ی مشاخر با مقادیر دشره ی ماکرین $R - \tilde{\Psi}$ هستند

$$a_1 > a_2 > \dots > a_p \longrightarrow D = \text{diag}(a_1, \dots, a_p)$$

$$R - \tilde{\Psi} = G D G' \longrightarrow G = (\underline{g}(1), \dots, \underline{g}(p))$$

حل فرض کنید K مقدار دشره ی ماکرین $R - \tilde{\Psi}$ مثبت باشد در این صورت از این سکول $\hat{\Lambda}$ را می توان

به صورت زیر نوشت:

$$\hat{\Lambda} \hat{\Lambda}' \equiv R - \tilde{\Psi}$$

$$\sum_{i=1}^K \hat{\lambda}(u) \hat{\lambda}'(u) \longrightarrow \sum_{i=1}^K a_i \underline{g}(u) \underline{g}'(u) \longrightarrow \hat{\lambda}(u) = \sqrt{a_i} \underline{g}(u)$$

$$\longrightarrow \hat{\Lambda} = G D^{1/2}$$

توجه داشته باشید اگر چنانچه $\hat{\Lambda}$ ها مثبت باشد جواب عامل اصلی قابل قبول است. در این جابیه ها باید تحلیل مؤلفه اصلی عامل های را که دارای مقادیر دشره ی کوچک (تقریباً صفر) بودند، خارج کنیم زیرا از اعتبار زیاد برخوردار نیستند بنابراین می توان متغیرهای را که به مجموعه ای آنها مشاخر بالاین مقادیر دشره ی کوچک هستند دقیقاً مانند تحلیل مؤلفه اصلی خارج کنیم

✓ حل تک عاملی برد $P=4$ متغیر را در نظر بگیرید و $\hat{\Lambda}$ و $\tilde{\Psi}$ را بر حسب عناصر ماکرین همبسته R

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ & 1 & r_{23} \\ & & 1 \end{bmatrix} = \hat{\Lambda} \hat{\Lambda}' + \tilde{\Psi} \longrightarrow \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \\ \hat{\lambda}_3 \end{bmatrix} [\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_3] + \begin{bmatrix} \hat{\psi}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\psi}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\psi}_{33} \end{bmatrix}$$

برگردار کنید

$$= \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1^2 + \hat{\psi}_{11} & \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 & \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_3 \\ \hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_1 & \hat{\lambda}_2^2 + \hat{\psi}_{22} & \hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_3 \\ \hat{\lambda}_3 \hat{\lambda}_1 & \hat{\lambda}_3 \hat{\lambda}_2 & \hat{\lambda}_3^2 + \hat{\psi}_{33} \end{bmatrix}$$

$$r_{12} r_{13} = \hat{\lambda}_1^2 \hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_3 = \hat{\lambda}_1^2 r_{23} \rightarrow \hat{\lambda}_1 = \sqrt{\frac{r_{12} r_{13}}{r_{23}}}$$

$$\hat{\lambda}_1^2 + \hat{\psi}_{11} = 1 \rightarrow \hat{\psi}_{11} = 1 - \frac{r_{12} r_{13}}{r_{23}}$$

$$\hat{\lambda}_2^2 = \frac{r_{12} r_{23}}{r_{13}}, \quad \hat{\lambda}_3^2 = \frac{r_{31} r_{23}}{r_{12}}$$

$$\hat{\psi}_{22} = 1 - \frac{r_{12} r_{23}}{r_{13}}, \quad \hat{\psi}_{33} = 1 - \frac{r_{31} r_{23}}{r_{12}}$$

* مثال ۴.۹ مناسب جانوی

مثال ۹.۹ ص ۵۱۲

مثال ۹.۴ ص ۴۹۴

مثال ۸.۵ مربوط به سهام نفت و ...

فصل ۸، ۹ مثال بردی نیم چون خیلی پر زده هم *

قرائت عامل اصلی:

۱. بردش عامل اصلی به طور مشخص مناسب است.
۲. می سیم عامل اصلی با نرم افزار بیابان است.
۳. به سادگی می توان مقدار عامل ها تغییر داد.

اشکالات عامل اصلی:

۱. استدلال نظری ندارد

۲. بردش عامل اصلی معیار مناسب

تجلی عالی درستی $\max$

در این حالت فرض بر این است که جامعه دارای توزیع نرمال متغیره NP است یا اینکه حجم نمونه زیاد در نتیجه توزیع نمونه به سمت توزیع نرمال طبیعتی حوضی می رود در این صورت می توان برآوردها درستی و نسیم $\hat{\theta}$ و $\hat{\sigma}$ را با نسیم سازی تابع درستگامی نمونه به شکل زیر نوشته می شود درست آورد

معادله ۹-۲۷ χ^2 حاصل را ببینید.

لازم به ذکر است برای اینکه می سبب امکان پذیر باشد در این روش نیز شرط قطری بودن ماتریس $\hat{\theta}$ در نظر گرفته می شود همچنین اگر مدل K عالی براساس P متغیر به داده ها برازش داده می شود در این صورت نسیم K عامل از کل واریانس نمونه را برابر است با

$$\frac{\sum_{i=1}^P \hat{\theta}_i^2}{P}$$

از مودل χ^2 برای برازش

در روش عالی درستگامی و نسیم می توان از مودل فرضی های زیر را مورد بررسی قرار داد:

H_K : مدل K عالی متغیره است

H' : مدل K عالی متغیره نیست

با توجه فرضیات فوق پارت در سال ۱۹۵۴ نشان داد که نه از این K معین فرضیه H_K را می توان استفاده از آماره زیر از مودل کنیم:

$$\chi^2 = (n - \frac{2P+5}{2} - \frac{2}{4}K) P(\hat{\alpha} - \ln \hat{\theta} - 1) \sim \chi^2_{df}$$

که در آن $\hat{\alpha}$ و $\hat{\theta}$ به ترتیب میانگین ها حسابی و هندسی مقادیر دگرگونی $\hat{\theta}$ هستند

$$\hat{\theta} = \hat{\alpha} \hat{\alpha}' + \hat{\theta}$$

نیایدن در سطح α فرضیه H_0 روی نمودار

$$\chi^2_{\alpha} > \chi^2_{df}(\alpha)$$

دستور بالای خروج χ^2_{df}

تذکر: در حالت $K=0$ ، $\hat{\Lambda}$ وجود نداشته و رابطه $\chi^2 = \Lambda \Lambda' + I_p$ نتیجه می‌گیرد که فاکتور χ^2

قطری شده و لذا مقیاس‌ها مستقل خواهند بود در نتیجه همه مقیاس‌ها را باید مورد بررسی قرار دهیم

در این حالت فرضیه H_0 فرضیه جانشین نمونه به صورت زیر است:

$$H_0: \chi^2 = 0$$

که معادل است با فرضیه استقلال مقیاس‌ها مشاهده شده.

تذکر: بله، است معادله از K قبل قبول اند که df را مثبت کند.

تذکر: اگر برای تمام مقیاس‌ها K فرضیه H_0 رد شود نتیجه می‌گیریم که مدل K عاملی به داده‌ها مناسب نیست.

نهایت.