

تأثیر جانسون و دیو بر حجم دستبرد

تحلیل فاکر چند متغیره کاربرد

فصل اول مقدمات

در تحلیل چند متغیره، متغیرهای مربوطه را به طور همزمان مورد بررسی قرار می دهیم به عنوان مثال فرض کنید می خواهیم پیشرفت تحصیلی دانشجویان در دروس آمار و دروس کارشناسی مورد تحلیل و بررسی قرار دهیم

معمولاً این متغیر با تعداد زیادی متغیرها متصل به نظر زیر رابطه خواهد داشت

جنسیت دانشجوی X_1 ، رتبه کنکور X_2 و معدل پیش دانشگاهی X_3

متغیر مربوط به نحوه آفرینش X_4 و تغییر روحانی X_5

سن دانشجو X_6 و میزان IQ دانشجو X_7

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}$$

باشد

مستویها متغیرها

سطرها باقی مانده

individuals

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & \dots & \dots & S_{pp} \end{pmatrix}$$

p: تعداد متغیرها

$$S_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j)$$

بردارها و مقادیر ویژه عاقلی ها :

برای سببه ی بردارها و مقادیر ویژه مربوط به A عاقلی بر دخیال حل معادلاتی بر فر (طی زیر می باشد)

$$Ax = \lambda x \quad \text{مقادیر ویژه}$$

همان طور در عاقلی عاقلی دریم بر حل معادله فون کافی است معادله زیر را حل کنیم

$$|A - \lambda I| = 0$$

مثال: عاقلی و بردارها و مقادیر ویژه عاقلی زیر را پیدا کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: عاقلی ویژه:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

$$Ax = \lambda_1 x \rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3x_1 \rightarrow x_1 = -x_2 \\ -2x_1 + x_2 = 3x_2 \rightarrow x_1 = -x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -C \\ C \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= C \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \rightarrow \text{بردار ویژه مربوط به } \lambda_1$$

$$Ax = \lambda_2 x \rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -x_1 \\ -2x_1 + x_2 = -x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

برای دایره λ_2 : $\begin{bmatrix} C \\ C \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = C' \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

تغییر جردن

اگر A یک ماتریس $n \times n$ معکوس باشد در این صورت آن را می توانیم به شکل زیر اختصار کنیم :

$$A = P \Lambda P'$$

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

برداران $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ یک ماتریس قطری با مقادیر دایره A (عناصر) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ که به ترتیب نزولی مرتب شده اند. $(\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n)$ و P ماتریس متعامدی است که ستون ها آن بردارها

دایره متعامد با مقادیر دایره A یعنی λI ها است.

یادآوری : متعامد بودن یک ماتریس بدین معنیست که معکوس آن همان ماتریس با ترانژپوز آن است

$$P P' = P' P = I_n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

تغییر جردن
مثال صفحه قبل

نکته : ارتباط طریقی توان نوشتن $A^n = P \Lambda^n P'$ ، $\lambda_i \neq 0$ ، $A^{-1} = P \Lambda^{-1} P'$

$$A^{1/2} = P \Lambda^{1/2} P'$$

تعریف : ماتریس A $n \times n$ یک ماتریس معین مثبت است هرگاه $a_{ii} > 0$ و $\Delta_{n \times 1}$
 $\Delta^T A \Delta > 0$ و می نویسیم $A \gg 0$ هم چنین می نویسیم ماتریس A معین مثبت (معین نامنفی)

اس سے مراد $\alpha \neq 0$

نمونه ۱: $y = Ax + b$ (خطی)
 A یک بردار $n \times p$ است. (ماتریس)
 x یک بردار $p \times 1$ است. (ماتریس)
 y یک بردار $n \times 1$ است. (ماتریس)

7. $E(y) = \underline{A} E(x) + \underline{b} = \underline{A} x + \underline{b}$

$$2. \text{Var}(\underline{y}) = \underline{A} \text{Var}(\underline{x}) \underline{A}' = \underline{A} \underline{\Sigma}_x \underline{A}'$$

توزيع نرجال خلد مغیره

سوال: صافنی P_{x1} کے دائرہ فوج نواں P متقیہ الس اگر تاج چھانی احمال ان بصورت زیر بات:

$$f(x) = \frac{1}{|\sqrt{\pi} \Sigma|^{1/4}} e^{-1/4(x-\underline{\mu})' \Sigma^{-1}(x-\underline{\mu})}$$

$$x \in \mathbb{R}^p, \mu \in \mathbb{R}^p, \Sigma_{\mathbb{R}^p} \gg 0, \underline{x} \sim N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$$

1/

اگر X دارای توزیع $(\Sigma, \mu) N_p$ باشد، در این صورت

$$(\underline{x} - \underline{L}^n)' \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{L}^n) \sim \chi^2_{(p)}$$

نکته: اگر $(\Sigma, \mu) \sim N_p(\Sigma, \mu)$ باشد، در این صورت شرط لازم کافی برآید $Ax + b$

$\underline{A} \cup \underline{B} = \underline{C}$ مثل باشد آن را $\underline{B} \cup \underline{C}$

تذکرہ

$K_I + K_r = P$ ، $N_p(\mathcal{L}^n, \Sigma) \sim \tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_I & K_{xI} \\ \tilde{x}_r & K_{rxI} \end{pmatrix}$
 $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{II} & \Sigma_{Ir} \\ \Sigma_{rI} & \Sigma_{rr} \end{pmatrix}$

$$\underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} \underline{\Sigma}_{II} & \underline{\Sigma}_{IR} \\ \underline{\Sigma}_{\eta K_{rk} K_l} & \underline{\Sigma}_{rr'} \end{pmatrix}$$

الف) $Z_1 \sim N_{K_1}(\underline{\mu}_1, \underline{\Sigma}_{11})$

$$* \Sigma_{11,2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}$$

$$\underline{x}_2 \sim N_{K_2}(\mu_2, \Sigma_{22}) \quad (ب)$$

نیز دارای توزیع نرمال K_1 متغیره بوده مستقل از $\underline{x}_2$ می باشد به طوری که:

$$\Sigma_{11,2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}$$

$$\mu_{1,2} = \mu_1 - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \mu_2$$

جمله سوم

$$\underline{x}_2 | \underline{x}_1 \sim N_{K_2}(\mu_2 + \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} (\underline{x}_1 - \mu_1), \Sigma_{22,1}) \quad (ج)$$

کافرض کنید $\underline{x}$ دارای توزیع $N_K(\mu, \Sigma)$ نرمال سه متغیره به شکل زیر باشد.

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

توزیع شرطی $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} | x_3$ را بیابید

حل: با توجه به اینکه بردار $\underline{x}$ از توزیع نرمال سه متغیره پیروی می کند لذا طبق نکته گفته شده در بالا

$$E \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} | x_3 \right] = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma_{12} \\ \Sigma_{22} \end{pmatrix} \Sigma_{33}^{-1} (x_3 - \mu_3) = \begin{pmatrix} \mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{33}^{-1} (x_3 - \mu_3) \\ \mu_2 + \Sigma_{22} \Sigma_{33}^{-1} (x_3 - \mu_3) \end{pmatrix}$$

ARSH

$$* \underline{x}_1 | \underline{x}_2 \sim N_{K_1}(\mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (\underline{x}_2 - \mu_2), \Sigma_{11,2}) \quad (د)$$

برای ما

$$\text{Var} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_r \right) = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho^r \\ 0 \end{pmatrix} (1)^{-1} \begin{pmatrix} \rho^r & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho^{2r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \rho^{2r} & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_r \sim N_r(\dots)$ توزیع

$$E \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_r \right] = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Cov}(x_1, x_r) \\ \text{Cov}(x_2, x_r) \end{pmatrix} \xrightarrow{\Sigma_{rr}} \xrightarrow{\rho} \text{Var}(x_r)^{-1} (x_r - \mu_r)$$

$$= \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho x_r - \rho \mu_r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 + \rho(x_r - \mu_r) \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Var} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_r \right] = \begin{pmatrix} 1 & \rho^r \\ \rho^r & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Cov}(x_1, x_r) \\ \text{Cov}(x_2, x_r) \end{pmatrix} \text{Var}(x_r)^{-1} \times$$

$$\begin{bmatrix} \text{Cov}(x_1, x_r) & \text{Cov}(x_2, x_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho^r \\ \rho^r & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho^r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ماتریس واریانس کوواریانس} = \begin{bmatrix} 1 - \rho^{2r} & \rho^r \\ \rho^r & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ماتریس واریانس کوواریانس باشد}$$

جواب چهارم

نکته: جابجایی در مثال قبل $\underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0.18 & -0.16 \\ 0 & 1 & -0.157 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\underline{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ باشد توزیع شرطی

$E \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_2 \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.18 \\ -0.157 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1}} (x_2 - \frac{0}{1}) = \begin{pmatrix} 0.18x_2 \\ -0.157x_2 \end{pmatrix}$

$Var \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_2 \right] = \begin{bmatrix} Cov(x_1, x_1) & Cov(x_1, x_3) \\ Cov(x_1, x_3) & Cov(x_3, x_3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Cov(x_1, x_2) \\ Cov(x_3, x_2) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & -0.16 \\ -0.16 & 1 \end{bmatrix} -$

$* Var \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_2 \right] = \begin{bmatrix} Var(x_1) & Cov(x_1, x_3) \\ Cov(x_1, x_3) & Var(x_3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Cov(x_1, x_2) \\ Cov(x_3, x_2) \end{bmatrix}$

$\times Var^{-1}(x_2) \begin{bmatrix} Cov(x_1, x_2) & Cov(x_3, x_2) \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -0.16 \\ -0.16 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.18 \\ -0.157 \end{bmatrix} \times 1 \times \begin{bmatrix} 0.18 & -0.157 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0.136 & -0.1828 \\ -0.1828 & 1.136 \end{bmatrix}$

جواب بنویس

$$E \left[x_2 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \right] = \mu + \begin{bmatrix} \text{cov}(x_2, x_1) & \text{cov}(x_2, x_3) \\ \text{var}(x_1) & \text{cov}(x_1, x_3) \\ \text{cov}(x_3, x_1) & \text{var}(x_3) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_3 - \mu_3 \end{bmatrix}$$

$$= \mu + \begin{bmatrix} 0.18 & -0.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.14 \\ -0.14 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Var} \left[x_2 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \right] = \text{Var}(x_2) - \begin{bmatrix} \text{cov}(x_2, x_1) & \text{cov}(x_2, x_3) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{var}(x_1) & \text{cov}(x_1, x_3) \\ \text{cov}(x_3, x_1) & \text{var}(x_3) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \text{cov}(x_1, x_2) \\ \text{cov}(x_3, x_2) \end{bmatrix}$$

$$= 1 - \begin{bmatrix} 0.18 & -0.01 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -0.14 \\ -0.14 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0.18 \\ -0.07 \end{bmatrix}$$

تعریف فرم هاردمن

فرم های در بردار به شکل $x'Ax$ که در آن x یک بردار $P \times 1$ ، A یک ماتریس $P \times P$ است نوشته می شود. نوع فرم هاردمن در صورتی که $x \sim N_p(\mu, \Sigma)$ باشد بسیار جالب است که در ادامه به بررسی آن خواهیم پرداخت.

$$(\text{Var}(z) = E(xx') - \mu\mu')$$

فرض کنید $x_{P \times 1}$ دارای توزیع (μ, Σ) باشد در این صورت آن هیدر است

$$E(x'Ax) = \text{tr}(A\Sigma) + (\mu'A\mu)$$

$$E(x'Ax) = E(\text{tr}(x'Ax)) = E(\text{tr}(Ax x')) = \text{tr}[E(Ax x')] = \text{tr}(AE(xx'))$$

$$= \text{tr}[A(\text{Var}(x) + \mu\mu')] = \text{tr}[A(\Sigma + \mu\mu')] = \text{tr}(A\Sigma) + \text{tr}(A\mu\mu')$$

$$= \text{tr}(A\Sigma) + \text{tr}(\mu'\mu A) = \text{tr}(A\Sigma) + \mu'A\mu$$

ARSH

جمله پنجم

نکته: اگر $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ باشد:

$$\left. \begin{aligned} E(\underline{X}'\underline{A}\underline{X}) &= \text{tr}(\underline{A}\underline{\Sigma}) \\ \text{Var}(\underline{X}'\underline{A}\underline{X}) &= 2\text{tr}(\underline{A}\underline{\Sigma})^2 \end{aligned} \right\} \text{اولاً:}$$

ثانیاً: شرط لازم و کافی برای آنکه $\underline{X}'\underline{A}\underline{X}$ دارای توزیع χ^2 (کای دو) باشد، آن است که ماتریس $\underline{A}\underline{\Sigma}$ خود توان باشد.

توان (درجه دو) ماتریسی: پس از بررسی فرم های درجه دو اکنون توان (درجه دو) ماتریسی را که بصورت

ماتریس $\underline{X}'\underline{C}\underline{X}$ بوده و $\underline{C}$ یک ماتریس متقارن است مورد بررسی قرار می دهیم

$$\underline{X}_{n \times p} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1' \\ \underline{x}_2' \\ \vdots \\ \underline{x}_n' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 \times p \\ 1 \times p \\ \vdots \\ 1 \times p \end{matrix}$$

توزیع ویشارت Wishart

اگر ماتریس $\underline{M}$ را بتوان بصورت $\underline{M} = \underline{X}'\underline{X} = \sum_{i=1}^m \underline{x}_i \underline{x}_i'$ نوشت به دران $\underline{X}_{m \times p}$ ماتریس داده ها بوده دارای توزیع $N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ است. دلیل صورت گفته می شود که $\underline{M}$ دارای توزیع ویشارت

با پارامترهای $\underline{\Sigma}$ و درجه آزادی m است و به اختصار می نویسیم

$$\underline{M} \sim W_p(\underline{\Sigma}, m)$$

(درجهت با توجه به اینکه $\underline{x}_i$ ها مستقل از هم هستند هر یک از $\underline{x}_i \underline{x}_i'$ دارای توزیع ویشارت p است

با درجه آزادی و پارامترهای $\underline{\Sigma}$ است $\underline{x}_i \underline{x}_i' \sim W_p(\underline{\Sigma}, 1)$

خواص توزیع ویسارت:

۱. اگر $\underline{M} \sim W_p(\underline{\Sigma}, m)$ باشد آنگاه $E(\underline{M}) = m \underline{\Sigma}$ برآید:

$$E(\underline{M}) = E\left[\sum_{i=1}^m \underline{x}_i \underline{x}_i'\right] = \sum_{i=1}^m E(\underline{x}_i \underline{x}_i') \quad \text{برهان: } \text{var}(\underline{x}_i) + \underline{\mu} \underline{\mu}'$$

$$= \sum_{i=1}^m \underline{\Sigma} = m \underline{\Sigma} \quad \square$$

۲. اگر $\underline{M} \sim W_p(\underline{\Sigma}, m)$ باشد و $\underline{a}$ بردار ثابت p باشد و $\underline{P}$ متوجه باشد آنگاه

$$\frac{\underline{a}' \underline{M} \underline{a}}{\underline{a}' \underline{\Sigma} \underline{a}} \sim \chi_m^2$$

برهان:

$$\underline{a}' \underline{M} \underline{a} = \underline{a}' \sum_{i=1}^m \underline{x}_i \underline{x}_i' \underline{a} = \sum_{i=1}^m (\underline{a}' \underline{x}_i) (\underline{x}_i' \underline{a}) = \sum_{i=1}^m y_i^2$$

$$y_i = \underline{a}' \underline{x}_i = \underline{x}_i' \underline{a} = \sum_{j=1}^p a_j x_{ij} \sim N_p(0, \underline{a}' \underline{\Sigma} \underline{a})$$

اگر

$$\frac{\sum_{i=1}^m y_i^2}{\underline{a}' \underline{\Sigma} \underline{a}} = \frac{\underline{a}' \underline{M} \underline{a}}{\underline{a}' \underline{\Sigma} \underline{a}} \sim \chi_m^2 \quad \square$$

۳. اگر $\underline{M}_1 \sim W_p(\underline{\Sigma}, m_1)$ و $\underline{M}_2 \sim W_p(\underline{\Sigma}, m_2)$ و $\underline{M}_1$ و $\underline{M}_2$ از هم مستقل

باشند (در این صورت $(m_1, m_2) \sim W_p(\underline{\Sigma}, m_1 + m_2)$ است)

۴. اگر $\underline{M} \sim W_p(\underline{\Sigma}, m)$ و $B_{p \times q}$ یک ماتریس ثابت q باشد در این صورت

$$B' \underline{M} B \sim W_q(B' \underline{\Sigma} B, m)$$

خواهد بود.

نکته: اگر $X_{n \times p}$ ماتریس داده از توزیع نرمال P متغیره (Σ, μ) باشد و $C_{n \times n}$ یک ماتریس متجان باشد در این صورت

الف) توزیع $X'CX$ با توزیع مجموع توزیع های مستقل $W_p(\Sigma, 1)$ می باشد
توهم داشته باشید در این ها یا ضرایب مقادیر ویژه ماتریس C هستند.

ب) $X'CX$ در توزیع دشارت است اگر و فقط اگر ماتریس C خود توان باشد.

ج) $n \sim W_p(\Sigma, n-1)$ $\rightarrow \text{rank}(H)?$
 رتبه

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \dots & S_{pp} \end{bmatrix} = \frac{1}{n} X' H X$$

$$H = I_n - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}'$$

متجان است
ماتریس های کواریانس

$$S_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n (x_{ri} - \bar{x}_i)(x_{rj} - \bar{x}_j)$$

کواریانس بین متغیرها

نکته: اگر $X_{n \times p}$ ماتریس داده ها از توزیع نرمال P متغیره (Σ, μ) باشد و

$C_1, \dots, C_k$ ماتریس های متجان باشند در این صورت $X' C_1 X, \dots, X' C_k X$

توهم است اگر برای هر $i \neq j$ داشته باشیم $C_i \times C_j = 0$

✓ اگر جامعه دارای توزیع $N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ باشد نشان دهد برقرار می‌باشد نمونه $\bar{\underline{x}}$ و واریانس دریا

کواریانس نمونه $\underline{S}$ از هم مستقلند.

$$\bar{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{pmatrix} \quad \underline{S} = \frac{1}{n} \underline{X}' \underline{I} \underline{X}$$

$$\underline{C}_1, \dots, \underline{C}_K \quad N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$$

$$\underline{X}' \underline{C}_1 \underline{X}, \dots, \underline{X}' \underline{C}_K \underline{X} \quad i \neq j: \underline{C}_i \underline{C}_j = 0$$

$$\begin{aligned} \bar{\underline{x}} \quad \underline{S} = \frac{1}{n} \underline{X}' \underline{H} \underline{X} &\rightarrow \underline{H} \underline{I} \underline{I}' = \left(\underline{I} - \frac{1}{n} \underline{I} \underline{I}' \right) \underline{I} \underline{I}' = \underline{I} \underline{I}' - \frac{1}{n} \underline{X} \underline{X}' \underline{I} \underline{I}' \\ n' \bar{\underline{x}} \bar{\underline{x}}' = \underline{X}' \underline{I} \underline{I}' \underline{X} &\rightarrow \\ &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

پس چون $\underline{C}_i$ از $\underline{C}_j$ با $i \neq j$ مستقل شد پس $\bar{\underline{x}}$ و $\underline{S}$ مستقل شدند طبق استاتستیک فصل قبل.

$$S = \left(\frac{1}{n} \sum_{r=1}^n (x_{ri} - \bar{x}_i)(x_{rj} - \bar{x}_j) \right)$$

جواب تیز صحت

$$= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \begin{pmatrix} (x_{r1} - \bar{x}_1) & \dots & (x_{r1} - \bar{x}_1)(x_{rp} - \bar{x}_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_{rp} - \bar{x}_p)(x_{r1} - \bar{x}_1) & \dots & (x_{rp} - \bar{x}_p)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \begin{pmatrix} x_{r1} - \bar{x}_1 \\ \vdots \\ x_{rp} - \bar{x}_p \end{pmatrix} (x_{r1} - \bar{x}_1, \dots, x_{rp} - \bar{x}_p)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n (\underline{x}_r - \bar{\underline{x}})(\underline{x}_r - \bar{\underline{x}})' = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \underline{x}_r \underline{x}_r' - \bar{\underline{x}} \bar{\underline{x}}'$$

$$= \frac{1}{n} (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) \begin{pmatrix} \underline{x}_1' \\ \vdots \\ \underline{x}_n' \end{pmatrix} - \bar{\underline{x}} \bar{\underline{x}}' = \frac{1}{n} \underline{X} \underline{X}' - \left(\frac{1}{n} \underline{X} \underline{1} \right) \left(\frac{1}{n} \underline{1}' \underline{X} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \underline{X}' \left(\underline{I}_n - \frac{1}{n} \underline{1} \underline{1}' \right) \underline{X} = \frac{1}{n} \underline{X}' \underline{H} \underline{X}$$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\underline{x}_{(1)}, \dots, \underline{x}_{(p)})$$

تئریف: فرض کنید بردار d دارای توزیع نرمال P متغیره استاندارد باشد $d \sim N_p(0, I)$ و $m \sim W_p(I, m)$ و d و m مستقل از یکدیگر باشند یعنی شود:

$$m \perp d$$

دارای توزیع هیلین T^p با پارامترهای P, m نسبت و به عبارتی نویسیم

$$m d' m^{-1} d \sim T^p(P, m)$$

خاصیت خاص:

$$X_i \sim N(0, 1)$$

$$X_i^2 \sim \chi_1^2 \quad (i=1, \dots, m) \quad m = \sum_{i=1}^m X_i^2$$

$$\alpha = \frac{m d^2}{\sum_{i=1}^m X_i^2} = \frac{d^2 / 1}{\sum_{i=1}^m X_i^2 / m} \sim F(1, m)$$

خواص توزیع هیلین

۱. اگر $\underline{x}$ و $\underline{m}$ مستقل از یکدیگر و توزیع آنها به شکل زیر باشد

$$\underline{x} \sim N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma}), \quad \underline{m} \sim W_p(\underline{\Sigma}, m)$$

در این صورت داریم

$$m (\underline{x} - \underline{\mu})' \underline{m}^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu}) \sim T^p(P, m)$$

۲. اگر جامعه دارای توزیع $N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ باشد و $\bar{\underline{x}}$ و $\underline{S}$ به ترتیب بردار میانگین نمونه و

ماتریس کوواریانس نمونه باشند در این صورت:

$$(n-1) (\bar{\underline{x}} - \underline{\mu})' \underline{S}^{-1} (\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}) = n (\bar{\underline{x}} - \underline{\mu})' \underline{S}_u^{-1} (\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}) \sim T^p(P, n-1)$$

$$n \underline{S} = (n-1) \underline{S}_u \sim W_p(\underline{\Sigma}, m)$$

نقشه: اگر n دارای دیتا $(\underline{X}, m) \sim W_p(\underline{\Sigma}, m)$ و $m \geq p$ باشد، آنگاه
برای هر درجه آزادی p داریم:

$$\frac{\underline{a}' \underline{\Sigma}^{-1} \underline{a}}{\underline{a}' m^{-1} \underline{a}} \sim \chi^2_{(m-p+1)}$$

حالت خاص ($p=1$)

$$\frac{\underline{a}' \underline{\Sigma}^{-1} \underline{a}}{\underline{a}' m^{-1} \underline{a}} = \frac{\underline{a}' / \sigma^2}{\underline{a}' \sum_{i=1}^m x_i^2 / \sigma^2} = \frac{\sum x_i^2}{\sum x_i^2} \sim \chi^2_{(m)}$$

$$x_i \sim N(0, \sigma^2)$$

تقریب: با توجه به نقشه فوق ثابت کنید

$$\frac{mp}{m-p+1} F_{(p, m-p+1)} = T^p(p, m)$$

حل شدن اصولی ✓

یادآوری: اگر $x_1, \dots, x_n$ سطوحی حائز درجه آزادی X از توزیع $(\underline{\Sigma}, m)$ باشند، آنگاه داریم:

$$(\underline{x}_i - \underline{\mu})' \underline{\Sigma}^{-1} (\underline{x}_i - \underline{\mu}) \sim \chi^2_p$$

حال اگر حجم نمونه زیاد باشد یعنی n به قدر کافی بزرگ باشد ($n \gg p$) در این صورت می توان بر $\underline{\mu}$

$\underline{\mu}$ و $\underline{\Sigma}$ از برآوردهای نقطه‌ای نادریب آنها یعنی $\bar{\underline{x}}$ و S_u استفاده نمود و در نتیجه داریم:

$$\underbrace{(\underline{x}_i - \bar{\underline{x}})' S_u^{-1} (\underline{x}_i - \bar{\underline{x}})}_{\text{تقریب}} \sim \chi^2_p \quad (i=1, \dots, n)$$

بدین ترتیب که عبارت فوق دقیقاً در توزیع χ^2 نیست ولی تقریباً می توان آن را χ^2 فرض نمود هم چنین
تقریب داده بالیه به d ها مستقل از هم نیستند زیرا $\bar{\underline{x}}$ درون $\underline{\Sigma}$ هست.

از رابای فوق بران داده ها چند متغیره

برای بررسی اینکه آیا این مجموعه از داده ها دارای توزیع نرمال چند متغیره هستند یا خیر باید به صورت زیر عمل کنید:

۱. ابتدا d^2 ها را محاسبه کرده و آن ها را به ترتیب صعودی مرتب می کنیم (از کم به زیاد)

$$d_{(1)}^2 \leq d_{(2)}^2 \leq \dots \leq d_{(n)}^2$$

۲. نام $\chi^2_{(1-\alpha)}(n-1)$ را برای $n-1$ دایا رسم می کنیم

لحاظ اینکه توزیع χ^2 با P در هر داده که سطح زیر منحنی آن نقطه برابر $\frac{1-\alpha}{2}$ است

اگر نقاط بر روی خط راست قرار گرفته اند در این صورت تصدیق می شود که داده ها P متغیره دارای توزیع نرمال P متغیره هستند در صورتی که نمودار حاصل به یک منحنی عمال (درجه ۲) باشد می گوئیم که داده ها از توزیع نرمال چند متغیره تبعیت نمی کنند.

مثال ۱۲

فصله انجین هم زمان (الشرک - اجماع)

فرض کنید $x_1, \dots, x_n$ نمونه ای تصادفی از توزیع نرمال P متغیره M, Σ باشد (یعنی $N_p(M, \Sigma)$ باشد) و بخواهیم که طبق مطالب خوانده شده به ارزی هر بار P یعنی ثابت a می توان نوشت:

$$y_i = \underline{a}' x_i = x_i' \underline{a} \sim N_1(\underline{a}' M, \underline{a}' \Sigma \underline{a}) \quad (i=1, \dots, n)$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underline{a}' x_i = \underline{a}' \bar{x} \sim N_1(\underline{a}' M, \frac{\underline{a}' \Sigma \underline{a}}{n}) \\ &= N_1(\bar{y}, \frac{\sigma_y^2}{n}) \end{aligned}$$

ادامه توضیحات قبلی:

$$\begin{aligned}
 S_y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\underline{a}'x_i - \underline{a}'\bar{x})^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\underline{a}'x_i - \underline{a}'\bar{x})(\bar{x}'a - \bar{x}'a) \\
 &= \underline{a}' \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})' \right) \underline{a} \\
 &= \underline{a}' S_x \underline{a}
 \end{aligned}$$

اینون اسر $\sum$ تَجَوُّل باشد و بنویسیم فرض $H_0: \underline{a}'\underline{\mu} = \underline{a}'\underline{\mu}_0$ ، در مقابل $H_a: \underline{a}'\underline{\mu} \neq \underline{a}'\underline{\mu}_0$ ، از مایل کنیم بدین است که باید از توزیع t استوفاً به شرح زیر استفاده کنیم:

$$t_a = \frac{(\bar{y} - \mu_0) / \sigma_y / \sqrt{n}}{\sqrt{\frac{nS_y^2}{(n-1)S_y^2}}} = \sqrt{n-1} \times \frac{\bar{y} - \mu_0}{S_y}$$

$$\underline{H_0: \underline{a}'\underline{\mu} = \underline{a}'\underline{\mu}_0} \quad \sqrt{n-1} \times \frac{\underline{a}'(\bar{x} - \underline{\mu}_0)}{\sqrt{\underline{a}'S_x\underline{a}}} \sim t_{(n-1)}$$

$$t_a^2 \sim F(1, n-1) \quad \frac{\underline{a}'(\bar{x} - \underline{\mu}_0)(\bar{x} - \underline{\mu}_0)' \underline{a}}{\underline{a}'S_x\underline{a}}$$

حال چنانچه بخواهیم درستی فرض $H_0: \underline{\mu} = \underline{\mu}_0$ را آزمون کنیم، بدین است که این فرض در صورتی درست است که تمام فرض‌های H_a مقابله‌ای مقابله‌ای مختلف $\underline{a}$ درست باشد لذا شرط لازم و کافی برای آنست H_0 درست باشد آن است که برای تمام $\underline{a}$ ها داشته باشیم:

$$t_a^2 \leq C \rightarrow \text{فقدان برتری}$$

$$t_a^2 \leq C \iff \max_{\underline{a}} t_a^2 \leq C$$

فرضه: حل با روش رانک طریقی قضایای موجود در جعبه خطر داریم.

$$\lambda_1 < \frac{\underline{x}' A \underline{x}}{\underline{x}' B \underline{x}} < \lambda_p ; B \gg 0$$

$$B^{-1}A \sim P \Lambda P' \xrightarrow{\text{مقادیر ویژه}} \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_p$$

$$\begin{aligned} \max_{\underline{a}} t_a^r &= (n-1) \max_{\underline{a}} \frac{\underline{a}' (\bar{\underline{x}} - \underline{m}) (\bar{\underline{x}} - \underline{m})' \underline{a}}{\underline{a}' S \underline{a}} \\ &= (n-1) (\bar{\underline{x}} - \underline{m})' S^{-1} (\bar{\underline{x}} - \underline{m}) \sim T^r(p, n-1) = \frac{(n-1)}{n-p} F_{(p, n-1)} \end{aligned}$$

(توزیع فشر)

بنابراین باید برای هر مقدار ثابت $\underline{a}$ داشته باشیم $t_a^r \leq T^r(p, n-1)$ و به طور معادل می توان نوشت:
 $\uparrow$ مقدار داخل جدول فشر

$$P(t_a^r \leq \left(\frac{(n-1)p}{n-p} F_{\alpha}(p, n-p) \right)) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{\sqrt{n-1} (\underline{a}' \bar{\underline{x}} - \underline{a}' \underline{m})}{\sqrt{\underline{a}' S \underline{a}}} \leq \sqrt{\frac{(n-1)p}{n-p} F_{\alpha}(p, n-p)} \right) = 1 - \alpha$$

$$\underline{a}' \underline{m} \leq \underline{a}' \bar{\underline{x}} \pm \sqrt{\frac{p}{n-p} \underline{a}' S \underline{a} F_{\alpha}(p, n-p)}$$

اگر در این فاصله باشد فرض صفر پذیرفته می شود و در غیر این صورت رد می شود.

تذکره: طریقی بین فاصله ی اطمینان و آزمون فرض خطایی $\underline{m}$ عضو بازه اطمینان بدین معده در بالا باشد

در این صورت فرضیه $H_0: \underline{a}$ پذیرفته می شود و در غیر این صورت با اطمینان $1 - \alpha$ رد خواهد شد.

✓ فرض کنید $(\sum, \mu) \sim N_p(\mu, \Sigma)$ با مشخصه‌های $\mu = (1, 2, 3)$ و $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $n = 17$ اطلاعات زیر در دسترس است. آزمون فرضیه

فاصله اطمینان ۹۵٪ برای μ_2 بر حسب درجه

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 5.25 \\ 5.4 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 5.25 & 5.4 & 2.5 \\ 5.4 & 1.4 & 2.0 \\ 2.5 & 2.0 & 2.2 \end{pmatrix}$$

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} \sim N_p(\mu, \Sigma)$$

ماتریس همبستگی

$$a_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow a_0' \mu = \mu_2$$

$$\mu_2 = \bar{x}_2 \pm \sqrt{\frac{P}{n-P} S_{22} F_{\alpha, 1, n-P}(\frac{1}{P} \frac{n}{n-P})}$$

$$= 5.4 \pm \sqrt{\frac{3}{14} \times (1.4) \times 2.2}$$

تمرین: اگر مثال قبل در فاصله اطمینان برای μ_2 بر حسب درجه و همبستگی فرضیه

$H_0: a_0' \mu = a_0' \mu_0$ را در مثال قبلی فرض کنید با اطمینان ۹۵٪ برای $a_0 = (1, -1, 1)$ آزمون کنید.

$$a_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow a_0' \mu = \mu_1 - \mu_2 + \mu_3$$

$$\mu_1 - \mu_2 + \mu_3 = a_0' \bar{x} \pm \sqrt{\frac{P}{n-P} a_0' S a_0 F_{\alpha, 1, n-P}(\frac{1}{P} \frac{n}{n-P})}$$

$$-5.25 + 5.4 + 2.5 = 2.65 \pm \sqrt{\frac{3}{14}}$$

کتاب در دست گرفتن هاروینو شده

نکته: به طریقی ارجاع داده برای قبول P متغیره $\sum$ باشد و $C_{(P-1) \times P}$ ماتریس معکوس باشد
 در حالت عادی $H_0: C^M = 0$ (مقابل $H_1: C^M \neq 0$) در سطح خطای α فرض H_0 را رد می کنیم

$$T^2_{(P-1, n-1)} = (n-1) (\bar{C} \bar{C}')^{-1} \bar{C} \bar{C}' \frac{(n-1)(P-1)}{n-P+1} F_{\alpha}(P-1, n-P+1)$$

هم چنین بازه اطمینان برای متوسط بردار C^M در اطمینان $1-\alpha$ به طریقی زیر بدست می آید.

$$\bar{C}_i^M: \bar{C}_i \pm \sqrt{\frac{P-1}{n-P+1} F_{\alpha}(P-1, n-P+1) (\bar{C}_i' \bar{C}_i)}$$

↓
سطح از ماتریس C

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_{P-1} \end{pmatrix}$$

فرض کنید $\checkmark$ $x_i \sim N_p(\bar{\mu}, \Sigma)$ باشد پس با مشاهده اطلاعات زیر بدست می آید.

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 27.0 \\ 20.4 \\ 17.9 \\ 15.4 \end{pmatrix}, \quad \underline{S} = \begin{pmatrix} 27.0 & 27.8 & 27.8 & 27.4 \\ 27.8 & 75.4 & 50.4 & 28.0 \\ 27.8 & 50.4 & 24.9 & 42.2 \\ 27.4 & 28.0 & 42.2 & 22.2 \end{pmatrix}$$

ماتریس $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ در فرضیه $H_0: C^M = 0$ (مقابل $H_1: C^M \neq 0$) خطای

۵. آزمون کدورتیافته بارهوی الجین باضرب الجین له برهوسه قوسن C برهوسه دره.

$$\left. \begin{array}{l} H_0: C^m = 0 \\ H_1: C^m \neq 0 \end{array} \right\} \text{آزمون فرضیه}$$

$$T^2(P-1, n-1) = (n-1)(C\bar{x})(CSC)^{-1}C\bar{x} \gg \frac{(n-1)(P-1)}{n-P+1} F_{\alpha}(P-1, n-P+1)$$

$$C\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.78 \\ 1.04 \\ 1.09 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.09 \\ -0.9 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

$$(C\bar{x})' = (1.09 \quad -0.9 \quad -1.1)$$

$$CSC' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.78 & 1.78 & 1.78 & 1.78 \\ 1.78 & 1.78 & 1.78 & 1.78 \\ 1.78 & 1.78 & 1.78 & 1.78 \\ 1.78 & 1.78 & 1.78 & 1.78 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.78 & 1.78 & 1.78 \\ 1.78 & 1.78 & 1.78 \\ 1.78 & 1.78 & 1.78 \end{pmatrix}$$

$$(CSC)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.1000 & 1.78 & -0.1000 & 1.78 & 1.78 & -0.1000 & 1.78 \\ -0.1000 & 1.78 & 1.78 & 1.78 & 1.78 & 1.78 & 1.78 \\ -0.1000 & 1.78 & 1.78 & 1.78 & 1.78 & 1.78 & 1.78 \end{pmatrix}$$

$$T^2(P-1, n-1) = 1.1(1.09 \quad -0.9 \quad -1.1) \begin{pmatrix} CSC^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.09 \\ -0.9 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (1, 10.15, -0.1089, 0.1014) \begin{pmatrix} 2.9 \\ -0.9 \\ -11 \end{pmatrix} = 19.719$$

$$T'(P-1, n-1) = 19.719 \gg \frac{18 \times 1^3}{19-1^3} F_{\dots} (1^3, 10) \quad \text{۲۴۵, ۱۹۵}$$

$$19.719 \gg \frac{1^3, 1^3 \vee 1}{1^3 \vee 1} \times 1^3 \vee 19.5$$

$$19.719 < 1^3 \vee 10.8 \rightarrow \text{At}$$

چون که حدیث شد فرض H. پذیرفته می شود

$$\underline{C_i}'^M: \underline{C_i}' \bar{x} \pm \sqrt{\frac{P-1}{n-P-1}} \sqrt{F_{\alpha}(P-1, n-P+1) (C_i' S C_i)} \quad \square \text{ به دست آوردن بازه اعیان بر رابطه}$$

$$\xrightarrow{\text{طرد}} \underline{C_i}' \bar{x} = (-1 \ -1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 12.8 \\ 4.4 \\ 4.9 \\ 0.4 \end{pmatrix} = 2.9$$

$$C_i' S C_i = (-1 \ -1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 12.8 & 12.8 & 12.8 & 12.8 \\ 12.8 & 12.8 & 12.8 & 12.8 \\ 12.8 & 12.8 & 12.8 & 12.8 \\ 12.8 & 12.8 & 12.8 & 12.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_i' S C_i = 12.8$$

$$C_i'^M: 2.9 \pm \sqrt{\frac{4.1}{14} \frac{F_{\alpha}(1, 14)}{144.95} 12.8} = 2.9 \pm \sqrt{14.9799, 44}$$

$$= (-14.719; 17.619)$$

$$9F(0.75, dF_1, dF_2)$$

استراتيجية R

Solve with

$$\text{for } C_r \bar{x} \rightarrow (1 \ -1 \ 1 \ -1) \begin{pmatrix} 12N \\ 10K \\ 1V9 \\ 2.5 \end{pmatrix} = 29$$

$$C_r S C_r = (1 \ -1 \ 1 \ -1) \begin{pmatrix} 12N & 12N & 12N & 12N \\ 12N & 12N & 12N & 12N \\ 12N & 12N & 12N & 12N \\ 12N & 12N & 12N & 12N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= (19.72 \ -7.12 \ -1 \ -1.15) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1100$$

$$C_r M = 29 \pm \sqrt{\frac{1}{16} \times 12N \times 12N \times 12N \times 12N}$$

$$= (-1.15, 1.15)$$

$$\text{for } C_r \bar{x} = (1 \ -1 \ -1 \ 1) \begin{pmatrix} 12N \\ 10K \\ 1V9 \\ 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 13.12$$

$$(12N \ -12N \ -12N \ 12N)$$

$$C_r M = -13 \pm \sqrt{\frac{1}{16} \times 12N \times 12N \times 12N \times 12N}$$

$$= (-1.15, 1.15)$$