«آمار و احتمالات مهندسی»

تعریف آمار: در اصطلاح عامیانه، آمار به معنای ثبت و نمایش اطلاعات عددی در مورد یک موضوع، مثلاً تعداد بیکاران و ... می باشد.

آمار

توصیفی: روش هایی که به وسیله ی آنها می توان اطلاعات جمع آوری شده را تنظیم، طبقه بندی و آنها را به صورت جداول و نمودارهای خلاصه نمود، به آمار توصیفی موسوم است.

استنباطی: این شاخه از آمار در ادامه آمار توصیفی وارد عمل شده و نتایج بدست آمده، استفاده از آمار توصیفی را از نمونه به جامعه تحت بررسی تعمیم می دهد.

برای معرفی این روش ها نیاز به اصطلاحات زیر داریم:

۱) جامعه (جمعیت): مجموعه ی تمام افراد یا اشیاء که مطالعات آماری در مورد یک یا چند صفت آنها در یک مکان و زمان معین انجام می گیرد به جامعه موسوم است. هر یک از این افراد و اشیاء را یک عنصر از جامعه نامیده و تعداد اعضا جامعه را اندازه ی آن جامعه می نامند.

۲) نمونه: عبارتست از زیر مجموعه ای از جامعه که طبق یک قاعده و ضابطه ی خاص برای مطالعه ی صفتی از جامعه انتخاب می شود. بدیهی است هر چه روش نمونه گیری دقیق تر باشد بهتر است. دقیق تر به این معناست که اعضای نمونه ی انتخابی بیشتر منعکس کننده ی جامعه ی مورد نظر باشند.

۳) داده ها (اطلاعات): در یک بررسی آماری بایستی صفت مورد مطالعه را به صورت ارقام و اعداد نمایش دهیم. چنانچه صفت مورد مطالعه کمی باشد (مانند: وزن، حجم، درجه حرارت و ...) آنگاه این عمل به سادگی با اندازه گیری امکان پذیر است. ولی چنانچه صفت مورد مطالعه کیفی باشد (مانند گروه خونی، شغل و ...) آنگاه باید با قاعده ای معین این صفت های کیفی را با اعداد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

و ارقام نمایش دهیم. درهر صورت این اعداد و ارقام را داده ها گوییم که به دو شکل کلی گسسته و پیوسته تقسیم می شوند.

- داده های گسسته: داده هایی هستند که بین دو مقدار متصور آنها هیچ عدد دیگری وجود ندارد (مانند: تعداد فرزندان خانواده و ...)

- داده های پیوسته: داده هایی هستند که بین دو مقدار متصور آنها همواره عدد دیگری وجود دارد (مانند: وزن افراد و ...)

۴) جداول آماری: نخستین گام در خلاصه سازی داده ها، طبقه بندی و تنظیم آنها در یک جدول، معروف به جدول آماری است. هدف از تنظیم یک جدول آماری این است که از آن بتوان به راحتی اطلاعات نهفته در مجموعه از داده ها را استخراج نمود. مهمترین مقادیر در هر جدول آماری عبارتند از:

یک جدول آماری با K طبقه و که ~~از~~ براساس نمونه ای به حجم n تشکیل شده را در نظر بگیرید

۱) طبقات ۲) نمایه طبقات ۳) فراوانی و فراوانی نسبی

۴) فراوانی تجمعی و فراوانی نسبی تجمعی

در اینصورت:

فراوانی $\longrightarrow f_i =$ تعداد عناصری که در طبقه iام قرار می گیرد.

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = n$$ (n: تعداد کل اعضای نمونه)

فراوانی نسبی $\longrightarrow r_i = \frac{f_i}{n} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, k$

$$\sum_{i=1}^{k} r_i = 1$$

Subject:
Year. Month. Date. ۱۲

فراوانی تجمعی طبقه i ام $\longrightarrow$ $F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$

فراوانی نسبی تجمعی طبقه i ام $\longrightarrow$ $R_i = r_1 + r_2 + \dots + r_i = \sum_{j=1}^{i} r_j$

نکته $\longrightarrow$ $F_k = n \qquad R_k = 1$

۵) جداول فراوانی:

۱.۵) جداول فراوانی برای داده های گسسته: با یک مثال بطور کامل بررسی می کنیم.

مثال: صنعتگری ۴ نوع قطعه ی A و B و C و D را تولید می کند، چنانچه او در یک روز ۲۰ قطعه از این قطعات را به شرح زیر تولید کرده باشد. یک جدول فراوانی برای این قطعات تشکیل می دهیم.

(از نوع کیفی است)

B C C A D C C B D C A C D C D C C B D B

$A \to 1 \qquad B \to 2 \qquad C \to 3 \qquad D \to 4$ نماینده طبقات

طبقات	نماینده	f_i	r_i	F_i	R_i
A	1	2	0/1	2	0/1
B	2	4	0/2	6	0/3
C	3	9	0/45	15	0/75
D	4	5	0/25	20	1
		20	1		

PaPCO

Subject :
Year. Month. Date. ( )

۲.۵) جدول فراوانی برای داده های پیوسته: با ارائه ی یک مثال نحوه ی تشکیل جدول فراوانی برای داده های پیوسته را بیان کنیم

مثال: وزن های ۴۰ قالب کره که به نزدیکترین عدد صحیح گرد شده اند به قرار زیر است، یک جدول فراوانی برای این داده ها بسازید.

34, ~~47~~ 44, 50, 38, 36, 47, 33, 46, 38, 34, 51, 36, 47, 24, 35,
52 (max), 30, 31, 21 (min), 41, ~~37~~ 33, 37, 35, 30, 32, 30, 29, 36, 40, 42,
40, 47, 43, 34, 31, 43, 23, 45, 26, 26,

۱) تعیین طبقات: معمولاً محققان توصیه می کنند که یک جدول فراوانی دارای تعداد طبقات 5 تا 15 باشد. چنانچه تعداد طبقات کمتر از 5 اختیار شود باعث از بین رفتن اطلاعات می شود و چنانچه بیشتر از 15 اختیار شود با هدف اصلی آمار توصیفی که همان خلاصه سازی اطلاعات است متناقض می باشد. در صورتی که محقق هیچ تجربه ی پیشین در مورد جامعه ی مورد بررسی نداشته باشد می توان از فرمول کلی زیر که توسط «استورجس»

تعداد طبقات ← $k = 1 + 3.322 \log n$ ← تعداد اعضای نمونه

مثال قالب کره: $k = 1 + 3.332 \log 40 = 6.32 \simeq 7$

گرد شده به سمت بالا

و دامنه ی واقعی داده

۲) تعیین دقت: با توجه به اینکه اعداد داده شده در مثال فوق گرد شده می باشند و از فرض اینکه جدول فراوانی که تشکیل می دهیم دربرگیرنده ی اعداد واقعی باشند برای رسیدن به این هدف باید نصف میزان دقت اندازه گیری داده ها را از کران پایین هر طبقه کم کرده و به کران بالای هر طبقه اضافه نماییم. به عنوان مثال: چنانچه دقت اندازه گیری داده ها به صورت عدد صحیح باشد نصف میزان دقت برابر با

Subject:
Year. Month. Date. (۳)

95 خواهد بود. اگر داده‌های اندازه‌گیری شده دارای یک رقم اعشار باشند این مقدار برابر با 0/05 می‌شود.

min max
21 52
20.5 ... 52.5

داده‌های واقعی در این بازه هستند

واقعی واقعی
D دامنه واقعی $= max - min = 52/5 - 20/5 = 32$

۳) تعیین طول طبقات:

کمترین داده واقعی بزرگترین داده واقعی

طول طبقات $\longrightarrow L = \frac{x_{max} - x_{min}}{k} = \frac{D}{K}$

$L = \frac{52.5 - 20.5}{7} = 4.57 \simeq 5$

۴) نماینده طبقات: عبارتند از میانگین کران بالا و پایین هر طبقه.
نماینده طبقه iام را با x_i نشان می‌دهیم.

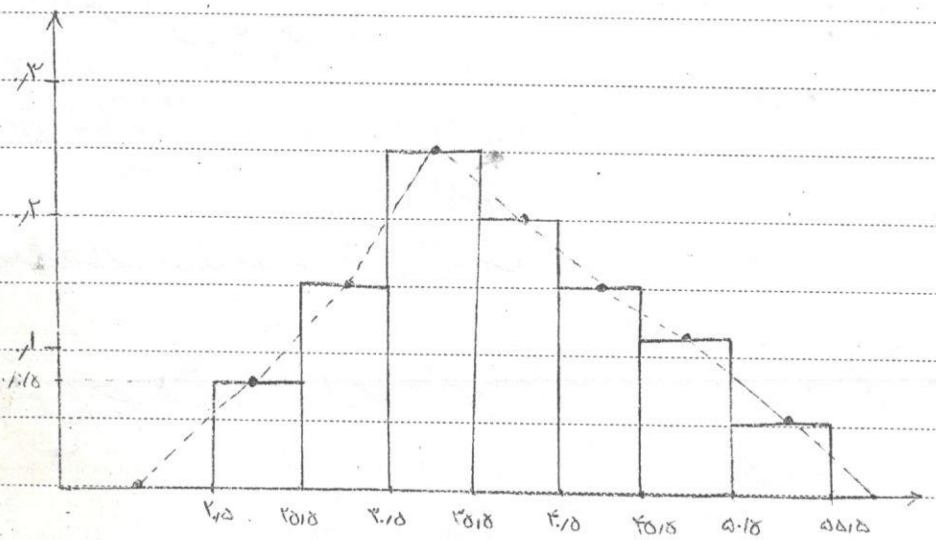
طبقات	x_i	f_i	r_i	F_i	R_i
20.5 - 25.5	23	3	0/075	3	0/075
25.5 - 30.5	28	6	0/15	9	0/225
30.5 - 35.5	33	10	0/25	19	0/475
35.5 - 40.5	38	8	0/2	27	0/675
40.5 - 45.5	43	6	0/15	33	0/825
45.5 - 50.5	48	5	0/125	38	0/95
50.5 - 55.5	53	2	0/05	40	1
		40	1		

Subject:
Year. Month. Date. ۶

نمودارهای آماری برای داده‌های پیوسته:

الف) نمودار هیستوگرام (نمودار ستونی): هیستوگرام نموداری متشکل از تعدادی مستطیل است که تعداد این مستطیل‌ها برابر با تعداد رده‌های جدول فراوانی می‌باشد، به طوری که قاعده‌ی هر مستطیل روی محور افقی قرار گرفته و طول آن برابر با طول واقعی رده است و مرکز آن نماینده‌ی رده می‌باشد. ارتفاع هر مستطیل برابر با فراوانی نسبی مربوط به آن رده است.

مثال: نمودار هیستوگرام را برای جدول فراوانی مربوط به وزن‌های ۴۰ قالب کره رسم کنید.



نکته: با فرض اینکه طول قاعده‌ی هر مستطیل واحد باشد، مجموع مساحت کل مستطیل‌ها برابر با یک خواهد شد.

$$\sum_{i=1}^{7} r_i = 1$$

ب) نمودار چندبر فراوانی: اگر نقطه‌ی وسط قاعده‌های بالای مستطیل‌های هیستوگرام را به وسیله‌ی خطوط مستقیم به طور متوالی به هم وصل نموده و ابتدای آن را به وسط رده‌ی فرضی ماقبل اول و انتهای آن را به وسط رده‌ی فرضی مابعد آخر وصل کنیم یک چندضلعی به وجود می‌آید که آن

Subject:
Year. Month. Date. ( )

را چندبر فراوانی گوییم و مساحت زیر این چندضلعی برابر با یک واحد مربع می شود

مثال) نمودار چندبر فراوانی مثال قبل را ترسیم نمایید. روی نمودار ده تا کدام با نقطه چین مشخص شده

ج) منحنی فراوانی: اگر در یک جدول فراوانی تعداد رده ها زیاد در نظر گرفته شود آنگاه طول رده ها کوچک شده و نقاط وسط قاعده ی بالای مستطیل ها به هم نزدیک خواهد شد در نتیجه با وصل نمودن این نقاط به هم چندضلعی تبدیل به منحنی خواهد شد که به آن منحنی فراوانی گوییم و مساحت زیر این منحنی برابر با یک واحد مربع می گردد.

شاخص های آماری:

الف) معیارهای گرایش مرکزی (معیارهای تمرکز):

این معیارها نشان دهنده ی ~~مقدار متوسط~~ نقطه ی وسط داده ها بوده و عبارتند از:

۱) میانگین حسابی: یکی از مهمترین، ساده ترین و در عین حال کارآمدترین معیارهای تمرکزی می باشد میانگین جامعه را با μ نشان می دهیم و میانگین نمونه را $\bar{x}$ نشان می دهیم که از رابطه ی زیر قابل محاسبه است.

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i x_i}$$

مثال) میانگین حسابی را برای دو مثال صنعتگر و وزن های قالب های کره حساب کنید.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. (۵)

مثال صفحه: $\bar{x} = \frac{1}{20}(2\times1 + 4\times2 + 9\times3 + 5\times4) = \frac{57}{20}$

مثال وزن‌ها: $\bar{x} = \frac{1}{40}(69 + 168 + 320 + 304 + 258 + 240 + 106) = 36{,}875$

مثال) نمرات دانش آموزان در یک درس خاص بصورت زیر است. میانگین آنها را حساب کنید.

۲۰ ـ ۲۰ ـ ۲۰ ـ ۲۰ ـ ۱۰ ـ ۱۰ ـ ۱۵ ـ ۱۵ ـ ۳ ـ ۳ ـ ۰

$\bar{x} = \frac{146}{12} = 12{,}16$

تمرین: داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_k$ را با فراوانی‌های $f_1, f_2, \ldots, f_k$ را در نظر بگیرید. اگر از تبدیل $y_i = ax_i + b$ $(i=1, \ldots, k)$ استفاده کنیم، چه رابطه‌ای بین میانگین داده‌های جدید $(\bar{y})$ با قدیم $(\bar{x})$ وجود دارد؟

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i (ax_i + b) = \frac{1}{n}\left[a\sum_{i=1}^{k} f_i x_i + b\sum_{i=1}^{k} f_i\right]$$

$$= \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i + \frac{nb}{n} = a\bar{x} + b$$

خواص میانگین حسابی:

۱) میانگین داده‌های ثابت برابر با خود آنهاست، زیرا:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} c = \frac{nc}{n} = c$$

۲) مجموع انحرافات از میانگین برابر صفر است، زیرا:

$$\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i - \sum_{i=1}^{k} f_i \bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$\sqrt[8]{2^{28}} = 2^{\frac{14}{4}=\frac{7}{2}} = 2^{3/5}$ ، ۱۲۸

۲) میانگین هندسی: از میانگین هندسی برای میانگین گیری روی داده هایی که تشکیل یک تصاعد هندسی می دهند استفاده می کنیم. میانگین هندسی را با نماد G نمایش می دهیم و از رابطه ی زیر محاسبه می کنیم:

$$\boxed{G = \sqrt[n]{x_1^{f_1} x_2^{f_2} \cdots x_k^{f_k}}}$$

مثال: سرعت اتومبیلی به ترتیب ۳۰، ۹۰ و ۲۷۰ بوده است، متوسط سرعت آن را به دست آورید.

$$G = \sqrt[3]{30 \times 90 \times 270} = 90$$

$\bar{x} = \frac{127/7}{7} = 18{,}14$

$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 \to G = \sqrt[7]{2^{21}} = 8$

۳) میانگین هارمونیک (همساز): میانگین هارمونیک را با H نشان داده و از رابطه ی زیر برای محاسبه ی آن استفاده می کنیم:

$$\boxed{\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{x_i}}$$

مثال: شخصی فاصله ی بین تهران چالوس را ~~که ۲۰۰ km است~~ با سرعت $60\ km/h$ رفته و با سرعت $40\ km/h$ برگشته است. سرعت متوسط را در رفت و برگشت تعیین کنید.

$$\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}}{2} \longrightarrow H = 48$$

نکته: همواره رابطه ی زیر بین میانگین ها برقرار است:

$$\bar{x} > G > H$$

تمرین: رابطه‌ی فوق برای دو داده‌ی x_1 و x_2 با فراوانی های یک اثبات کنید.

حل: می دانیم $x_1 , x_2 > 0$

$$\bar{x} \times H = \frac{x_1 + x_2}{2} \times \frac{2 x_1 x_2}{x_1 + x_2} = x_1 x_2 = G^2$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$G = \sqrt[2]{x_1 . x_2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\bar{x}}{G} = \frac{G}{H}$$

داریم G ...

$$H = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{2 x_1 x_2}{x_1 + x_2}$$

با توجه به زوج مثلثات مثبت

$$\bar{x} - H = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{2 x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 4 x_1 x_2}{2(x_1 + x_2)} = \frac{(x_1 - x_2)^2}{2(x_1 + x_2)}$$

$$\Longrightarrow H < G < \bar{x}$$

ج) میانه: میانه‌ی یک سری از داده ها عددی است که نصف داده ها از آن کمتر است و بقیه بیشتر است. به عبارت دیگر در یک مجموعه‌ی مرتب شده از اعداد، میانه عددی است که در وسط داده ها قرار می گیرد. برای محاسبه‌ی میانه در داده های خام ابتدا داده ها را به صورت صعودی مرتب می کنیم و بر حسب اینکه n زوج یا فرد باشد میانه را از رابطه‌ی زیر محاسبه می کنیم.

$$\text{میانه } m = \begin{cases} n \text{ زوج}: & \frac{1}{2}\left[x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n+2}{2})}\right] \\ n \text{ فرد}: & x_{(\frac{n+1}{2})} \end{cases}$$

مثال: میانه را در دو مجموعه از داده های زیر محاسبه کنید.

$$1 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 4 \quad 5 \longrightarrow n = 6$$

مرتب: $-2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 5 \longrightarrow \boxed{m = \frac{1+1}{2} = 1}$

$$4 \quad 7 \quad -2 \quad 1 \quad 0 \longrightarrow n = 5$$

مرتب: $-4 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 7 \longrightarrow \boxed{m = 0}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: جدول توزیع سن کودکان یک مهدکودک همراه با فراوانی آن به شرح زیر است. میانه‌ی آن را حساب کنید.

بررسی شود

x_i	f_i	F_i
۱	۴	۴
۲	۶	۱۰
۳	۱۵	۲۵
۴	۱۴	۳۹
۵	۱۱	۵۰
	۵۰	

$$M = \frac{1}{2}\left[x_{(25)} + x_{(26)}\right] = \frac{3+4}{2} = 3/5$$

میانه ۳ می‌شود ؟؟!!!

جداول فراوانی پیوسته

محاسبه‌ی میانه‌ی داده‌های پیوسته جداول فراوانی: برای محاسبه‌ی میانه در داده‌های جدول بندی شده ابتدا باید طبقه‌ی میانه‌دار را مشخص کنیم. این طبقه اولین طبقه‌ای است که فراوانی تجمعی آن بزرگتر یا مساوی نصف داده‌ها ($\frac{n}{2}$) باشد. پس از آن با استفاده از فرمول زیر میانه را مشخص می‌کنیم.

$$\boxed{M = L_m + \frac{\frac{n}{2} - F_{m-1}}{f_m} L}$$

L_m: کران پایین طبقه‌ی میانه‌دار

F_{m-1}: فراوانی تجمعی طبقه‌ی ماقبل میانه

f_m: فراوانی طبقه‌ی میانه‌دار

L: طول طبقات

مثال: با استفاده از جدول فراوانی وزن‌های ۴۰ قالب کره میانه را محاسبه کنید.

$$M = 35/5 + \frac{\frac{40}{2} - 19}{8} \times 5 = 35/5 + \frac{5}{8} = 36/125$$

Subject:
Year. Month. Date. ۱۷

۵- چندک‌ها : چندک مرتبه‌ی pام را با Q_p نمایش داده و عددی است که ۱۰۰p٪ از داده‌ها از آن کمتر و بقیه بیشترند.

۰.۲۴۲۱

نکته : میانه حالت خاصی از چندک‌هاست.

- چندک‌ها برای مقادیر خاص p نام‌های متفاوتی دارند. مثلاً برای مقادیر ۷۵٪ و ۵۰٪ و ۲۵٪ = p چارک‌ها نامیده شده و به ترتیب با Q_3 و Q_2 و Q_1 نمایش داده می‌شود.

- برای مقادیر ۰/۹ و ... و ۰/۲ و ۰/۱ = p ، دهک‌ها نامیده شده و به ترتیب با d_1 و d_2 و ... و d_9 نمایش داده می‌شوند.

- برای مقادیر ۰/۹۹ و ... و ۰/۰۲ و ۰/۰۱ = p صدک‌ها نامیده شده و به ترتیب با $P_1, P_2, \dots, P_{99}$ نمایش داده می‌شوند.

- محاسبه‌ی چندک‌ها در داده‌های خام: برای محاسبه‌ی چندک‌ها در داده‌های خام پس از مرتب کردن داده‌ها به ترتیب صعودی از فرمول زیر برای محاسبه‌ی چندک مرتبه‌ی pام استفاده می‌کنیم

$$\boxed{\begin{array}{l} Q_p = (1-w)\, x_{(r)} + w\, x_{(r+1)} \\ r = [(n+1)p] \quad , \quad w = (n+1)p - r \end{array}}$$

بنابراین چندک مرتبه‌ی pام یک میانگین وزنی از داده‌ی قرار گرفته در مرتبه‌ی rام و مرتبه‌ی r+1ام در مجموعه‌ی مرتب شده از داده‌هاست.

مثال: سن تعدادی از دانشجویان به صورت زیر است. میانه، چارک اول، دهک چهارم و صدک ۷۰ام را حساب کنید.

۱۸ , ۱۹ , ۱۹ , ۲۰ , ۲۰ , ۲۰ , ۲۰ , ۲۱ , ۲۱ , ۲۱ , ۲۱ , ۲۲

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$n = ۱۲$

میانه $\longrightarrow p = \frac{1}{2} \longrightarrow (n+1)p = ۶٫۵ \longrightarrow r = ۶ \;,\; w = ۰٫۵$

$\Longrightarrow m = ۰٫۵\, x_6 + ۰٫۵\, x_7 \longrightarrow m = ۲۰$

چارک اول $\longrightarrow p = \frac{1}{4} \longrightarrow (n+1)p = ۱۳ \times \frac{1}{4} = ۳٫۲۵ \longrightarrow r = ۳ \;,\; w = ۰٫۲۵$

$\Longrightarrow Q_1 = ۰٫۷۵\, x_{(3)} + ۰٫۲۵\, x_{(4)} = ۰٫۷۵(۱۹) + ۰٫۲۵(۲۰) = ۱۹٫۲۵$

دهک چهارم $\longrightarrow p = ۰٫۴ \longrightarrow (n+1)p = ۱۳ \times ۰٫۴ = ۵٫۲ \longrightarrow r = ۵ \;,\; w = ۰٫۲$

$\Longrightarrow D_4 = ۰٫۸\, x_{(5)} + ۰٫۲\, x_{(6)} = ۰٫۸(۲۰) + ۰٫۲(۲۰) = ۲۰$

صدک پنجم $\longrightarrow ۰٫۶۵ \times ۱۸ = ۱۱٫۷$

صدک هفتادم $\longrightarrow p = ۰٫۷ \longrightarrow (n+1)p = ۱۳ \times ۰٫۷ = ۹٫۱ \longrightarrow r = ۹ \;,\; w = ۰٫۱$

$P_{70} = ۰٫۹\, x_{(9)} + ۰٫۱\, x_{(10)} = ۰٫۹(۲۱) + ۰٫۱(۲۱) = ۲۱$

تمرین: برای جدول توزیع سن کودکان یک مهد کودک، چارک اول، دهک چهارم و صدک هفتادم را محاسبه کنید.

$$M = L_M + \frac{d_1}{d_1 + d_2}\, l \qquad d_1 = f_M - f_{M-1}$$
$$d_2 = f_M - f_{M+1}$$

مثال: در جدول فراوانی مربوط به وزن قالب های کره، دهک اول - چارک اول - چارک سوم
صدک ۹۵ام و صدک ۵ام.

$$Q_p = L_p + \frac{np - F_{p-1}}{f_p}\, l$$

$$D_1 = ۲۵٫۵ + \frac{۴ - ۳}{۷} \times ۵ = ۲۵٫۵ + \frac{۵}{۷} = \cancel{۲۷٫۱۴}\ ۲۶٫۲۲$$

$$Q_1 = ۴۰٫۵ + \frac{۱۰ - ۹}{۱۰} \times ۵ = ۴۱ \qquad Q_3 = ۴۰٫۵ + \frac{۳۰ - ۲۷}{۷} \times ۵ = ۴۲$$

$$P_{95} = ۴۵٫۵ + \frac{۳۸ - ۳۳}{۵} \times ۵ = ۵۰٫۵ \qquad P_5 = ۲۰٫۵ + \frac{۲ - ۰}{۳} \times ۵ = \cancel{۲۴٫۱۸}\ ۲۳٫۸۳$$

Subject:
Year. Month. Date. (۹)

مثال: مد را برای جدول فراوانی قالب‌های کره به دست آورید.

طبقه‌ی سوم $\longrightarrow ۳۰٫۵ + \frac{۱۰-۶}{(۱۰-۶)+(۱۰-۸)} \times ۵ = ۳۰٫۵ + \frac{۱۰}{۳} = ۳۳٫۸۳$

ب) معیارهای پراکندگی: معیارهای پراکندگی معیارهایی هستند که از آنها برای پی بردن به ~~نحوه‌ی~~ میزان پراکندگی ~~تغییرات~~ این داده‌ها استفاده می‌شود. مهمترین معیارهای پراکندگی عبارتند از:

۱) دامنه‌ی داده‌ها: ~~مهمترین~~ ساده‌ترین معیار پراکندگی بوده و برابر است با:

$$\boxed{R = x_{(n)} - x_{(1)} \longrightarrow \text{بزرگترین داده} - \text{کوچکترین داده}}$$

۲) واریانس (پراش): این معیار یکی دیگر از معیارهای پراکندگی بوده و برابر است با میانگین مجموع توان‌های دوم تفاضل داده‌ها از میانگین که به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\boxed{S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i\,(x_i - \bar{x})^2}$$

تمرین: ثابت کنید: $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i\, x_i^2 - \bar{x}^2$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i^2 + \bar{x}^2 - 2x_i\bar{x}) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - 2\frac{\bar{x}}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i + \frac{\bar{x}^2}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

(این فرمول معمول‌تر است)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی واریانس در جدول فراوانی مربوط به داده‌های قالب‌ها گیری:

طبقات	x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$	$(x_i - \bar{x})$	$f_i (x_i - \bar{x})^2$
۲۰٫۵ - ۲۵٫۵	23	3		۱۵۸۷	-۱۳٫۸۷۵	۵۷۷٫۵۴
۲۵٫۵ - ۳۰٫۵	28	6		۴۷۰۴	-۸٫۸۷۵	۴۷۲٫۵۹
۳۰٫۵ - ۳۵٫۵	33	10		۱۰۸۹۰	-۳٫۸۷۵	۱۵۰٫۱۵
۳۵٫۵ - ۴۰٫۵	38	8		۱۱۵۵۲	۱٫۱۲۵	۱۰٫۱۲۵
۴۰٫۵ - ۴۵٫۵	43	6		۱۱۰۹۴	۶٫۱۲۵	۲۲۵٫۰۹
۴۵٫۵ - ۵۰٫۵	48	5		۱۱۵۲۰	۱۱٫۱۲۵	۶۱۸٫۸۲
۵۰٫۵ - ۵۵٫۵	53	2		۵۶۱۸	۱۶٫۱۲۵	۵۲۰٫۰۳
				۵۶۹۶۵	۲۵۷۴٫۳۷۵	۲۵۷۴٫۴۴۵

$$S^2 = \frac{۵۶۹۶۵}{۴۰} - (۳۶٫۸)^2 = \cancel{\quad}$$

$(۳۶٫۸۷۵)^2$ ۶۴٫۳۶

$\bar{x} = ۳۶٫۸۷۵$

$$s^2 = \frac{۲۵۷۴٫۴۴۵}{۴۰} = ۶۴٫۳۶$$

۳) انحراف معیار: ریشه‌ی مثبت واریانس را انحراف از معیار نامیده و برابر است با:

$$\boxed{S = \sqrt{S^2}}$$

$s = ۸٫۰۲$

۴) ضریب تغییرات (C.V): معیارهای پراکندگی گفته شده تاکنون دارای واحد بودند مثلاً s^2 دارای واحد توان دوم داده‌ها (m^2 و km^2 و ...) و s از جنس خود داده‌ها بوده (m، km و ...). حال چنانچه بخواهیم پراکندگی دو مجموع از داده‌ها را که دارای دو واحد یکسان نیستند با هم مقایسه کنیم، این معیارها مناسب نیستند. به این منظور برای مقایسه‌ی پراکندگی دو مجموعه‌ی دلخواه از داده‌ها به معیاری نیازمندیم که دارای واحد نباشند. ضریب تغییرات یکی از این معیارهاست که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

Subject:
Year. Month. Date. ۱۵

$$C.V = \frac{S}{\bar{x}}$$ هم جنس داده ها

مثال: کارخانه ای دو نوع لاستیک اتومبیل تولید می کند. برای نوع A میانگین عمر ۱۰۰۰۰km با انحراف معیار ۲۰۰۰km و برای نوع B میانگین عمر ۱۱۰۰۰km و انحراف معیار ۱۰۰۰km می باشد. کدام نوع لاستیک بهتر است؟

۶۲۱,۵۷

1 mile = 1,6 km

۶۸۷۵ mile

$$A \rightarrow \begin{cases} \bar{x}_A = 10000 \\ S_A = 2000 \end{cases} \rightarrow C.V_A = 0/2$$

لاستیک نوع B بهتر، میانگین بیشتر، تغییرات کمتر

$$B \rightarrow \begin{cases} \bar{x}_B = 11000 \\ S_B = 1000 \end{cases} \rightarrow C.V_B = 0/09$$

تمرین: ثابت کنید ضریب تغییرات به واحد اندازه گیری بستگی ندارد.

مثال ۱: فرض کنید می خواهیم ~~ببینیم~~ راجع به پراکندگی دو مجموعه از داده که اولی در مورد وزن دانش آموزان یک دبیرستان kg و دیگری در مورد قد دانش آموزان همان دبیرستان برحسب سانتی متر است، اظهار نظر کنیم. داده های بدست آمده بصورت زیر خلاصه شده اند:

(kg) وزن: $\bar{X} = 60$, $S_X^2 = 144$

(cm) قد: $\bar{Y} = 170$, $S_Y^2 = 400$

تغییرات در صفت X بیشتر است.

$$CV_X = \frac{12}{60} = 0/2 \qquad CV_Y = \frac{20}{170} = 0/117$$

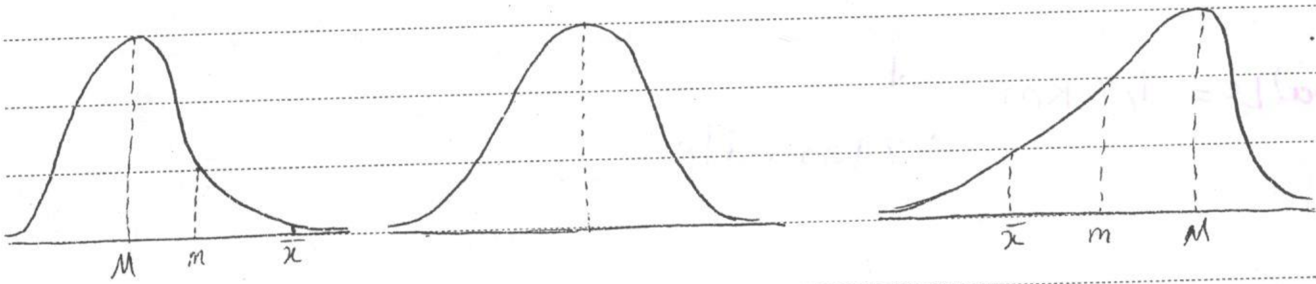
PaPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ضریب چولگی: میزان عدم تقارن منحنی فراوانی را چولگی آن گویند. این ضریب را با S_k نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$S_k = \frac{m_3}{S^3}$$

گشتاور مرکزی مرتبه ی r ام ⟵ $\boxed{m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i\,(x_i-\bar{x})^r}$



$S_k>0$	$S_k=0$	$S_k<0$
چوله به راست	متقارن	چوله به چپ
$M > m > \bar{x}$	$M = m = \bar{x}$	$\bar{x} < m < M$

یکی از ستون های جدول قالب های کره:

$f_i(x_i-\bar{x})^3$
-۸۰۱۳,۴۶
-۴۱۹۴,۲۶
-۵۸۱,۸۵
۱۱,۳۹
۱۳۷۸,۶۹
۶۸۸۴,۴۶
۸۳۸۵,۵
جمع: ۳۸۷۰,۴۶

$$m_3 = \frac{3870,46}{40} = 96,76$$

$$S_k = \frac{m_3}{S^3} = \frac{96,76}{(8,02)^3} = 0,187 > 0$$

چوله به راست است.

$M < m < \bar{x} \rightarrow 26,875 \rightarrow$ چوله به راست

M: ۲۲,۸۳ ، m: ۲۶,۱۲۵

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

~~ضریب برجستگی~~ کشیدگی:

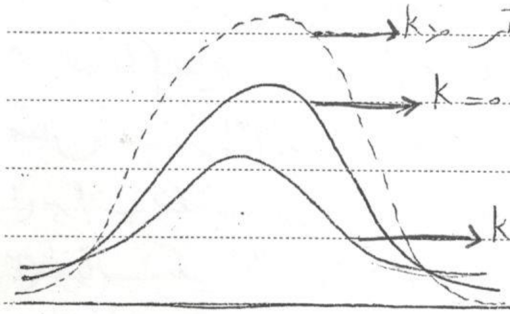
$f_i(x_i-\bar{x})^4$
۱۱۱۱۸۶٫۷۹
۳۷۲۳۴٫۱۴
۲۲۵۴٫۶۹
۱۲٫۸۱
۸۴۴۴٫۵۴
۷۶۵۸۹٫۶۵
۱۲۵۲۱۷٫۲۵
۱۳۷۰۹۲۸٫۸۶

پخ‌تر

$$k = \frac{m_4}{S^4} - 3 \simeq \frac{9274.2215}{(81.02)^4} - 3 \simeq -0.758$$

$$\boxed{m_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^4}$$

منحنی نرمال استاندارد $\longrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$



تمرین: داده‌های $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ با فراوانی‌های $f_1, f_2, \ldots, f_k$ را در نظر بگیرید $(\sum_{i=1}^{k} f_i = n)$. چنانچه داده‌های تبدیل یافته را به شکل $y_i = ax_i + b$ $(i=1,\ldots,k)$ در نظر بگیریم، چه رابطه‌ای بین نما، میانگین، میانه، واریانس، انحراف معیار، ضریب تغییرات و ضریب برجستگی و کشیدگی داده‌های جدید و قدیم وجود دارد؟

Subject:
Year. Month. Date. ( )

احتمال :

فضای نمونه‌ای پیشامد : در مسائل علمی اغلب اوقات با آزمایش هایی مواجه می شویم که اگر تحت شرایط مشابهی تکرار شود نتایج مختلفی به دست می آید که نشان دهنده‌ی یک عامل اتفاقی در نتیجه‌ی آزمایش است . به عنوان مثال در بررسی طول عمر لامپ های تولید شده توسط یک کارخانه و یا بررسی میزان تأثیر یک داروی جدید روی بیماران و غیره . با چنین آزمایش هایی مواجه می شویم که به آنها آزمایش تصادفی می گویند . بنابراین می توان گفت آزمایشی را که تحت شرایط یکسان بتوان تکرار کرد و نتیجه‌ی آن قبل از انجام آزمایش مشخص نبوده ولی کلیه‌ی نتایج ممکن آن مشخص باشند را یک آزمایش تصادفی می گویند .

مجموعه تمام نتایج یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه‌ای گویند و با S نشان می دهیم به عنوان مثال هر کدام از موارد زیر یک آزمایش تصادفی می باشند . مثلاً :

۱) پرتاب سکه $S_1 = \{H, T\}$ (خط / شیر)

۲) پرتاب یک تاس $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

۳) مثلاً طول عمر لامپ های تولید شده توسط یک کارخانه (با فرض اینکه می دانیم طول عمر آنها کمتر از ۱۰،۰۰۰ ساعت است .)
$S_3 = [0, 10000)$

با توجه به مثال های فوق در حالت کلی فضاهای نمونه‌ای به ۲ گروه زیر تقسیم می شوند :

۱) فضای نمونه‌ای گسسته : الف) متناهی ← مثال های ۱ و ۲
ب) نامتناهی ← آزمایش پرتاب سکه تا رسیدن به اولین شیر

$S = \{H, TH, TTH, TTTH, \ldots\}$

Subject:
Year. Month. Date. ۱۲

۲) فضای نمونه‌ای پیوسته: اعضای آن به صورت یک فاصله یا بازه‌ای از اعداد حقیقی یا یک سطح در فضای ۲ بعدی و یا یک حجم در فضای سه بعدی و ... است. مانند مثال ۳ در صفحه‌ی قبلی.

تعریف: در یک فضای نمونه‌ای متناهی هر زیرمجموعه از فضای نمونه را یک پیشامد گوییم. پیشامدی که تنها دارای یک عضو باشد، پیشامد ساده و پیشامدی که بیشتر از یک عضو دارد را پیشامد مرکب گوییم. پیشامدی که هیچ عضوی ندارد را پیشامد محال یا تهی و پیشامدی که برابر با فضای نمونه‌ای S باشد، پیشامد حتمی نامیده می‌شود.

مثال: فرض کنید یک جفت تاس را می‌اندازیم. پیشامدهای زیر را مشخص کنید:

۱) پیشامد اینکه مجموع اعداد ۲ تاس کمتر از ۳ باشد.
۲) پیشامد اینکه مجموع اعداد ۲ تاس بیشتر از ۱۰ باشد.
۳) پیشامد اینکه مجموع اعداد ۲ تاس حداقل ۳ باشد.

$S=\{(1,1)(1,2)(1,3)\ldots\ldots(6,1)(6,2)\ldots\ldots(6,6)\}$

$E_1=\{(1,1)\}$

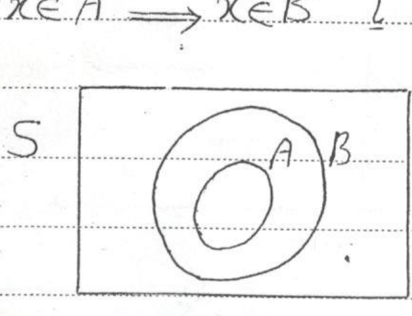
$E_2=\{(5,6)(6,5)(6,6)\}$

$E_3=\{\ \}=\emptyset$

اعمال روی پیشامدها:

الف) زیرپیشامدها: پیشامد A را زیرپیشامد B گوییم هرگاه وقوع A، B را نتیجه دهد و به صورت زیر می‌نویسیم:

$\forall x\in A \Longrightarrow x\in B$ یا $A\subset B$



Subject:

Year. Month. Date. ( )

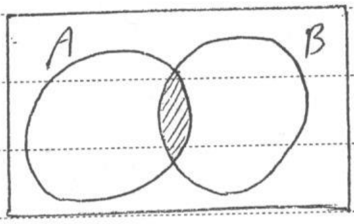
ب) دو پیشامد مساوی: دو پیشامد را مساوی گوییم هرگاه وقوع هر یک دیگری را نتیجه دهد.

$\forall x \in A \Longleftrightarrow x \in B$

$\{A \subset B \ , \ B \subset A\} \equiv A = B$

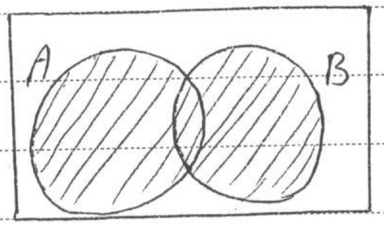
ج) اشتراک دو پیشامد: اشتراک ۲ پیشامد A و B را با $A \cap B$ نشان می‌دهیم و به معنای وقوع همزمان ۲ پیشامد A و B است.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \ , \ x \in B\}$



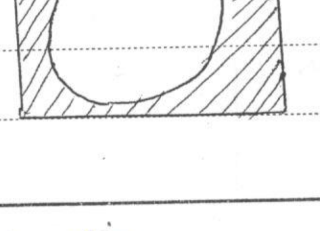
د) اجتماع دو پیشامد: اجتماع دو پیشامد را با $A \cup B$ نشان داده و به معنای وقوع حداقل یکی از این دو پیشامد است.

$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \text{یا} \ x \in B\}$



ه) متمم یک پیشامد: متمم پیشامد A را با A' نشان داده و به معنای عدم وقوع پیشامد A است.

$A' = \{x \mid x \notin A \ , \ x \in S\} = S - A$



PAPCO

تفاضل متقارن: $A \Delta B = (A - B)$ یا $(B - A)$ پیشامد

مثال: فرض کنید در یک بیمارستان ← A: پیشامد افرادی که بیماری قلبی دارند، B: پیشامد افرادی که عروق آنها بسته گردیده... احتمال اینکه فردی فقط دارای یکی از دو نوع بیماری فوق باشد چقدر است؟

$P(A) = ۳۰\%$ $\quad P(B) = ۴۰\%$ $\quad P(A \cap B) = ۱۰\%$

Subject:
Year. Month. Date. ۱۳

دو پیشامد ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار گوییم هرگاه نتوانند همزمان اتفاق بیفتند
و یا $A \cap B = \emptyset$.

مثال: در آزمایش پرتاب یک تاس اگر A پیشامد مشاهده‌ی عدد زوج و B پیشامد مشاهده‌ی عدد فرد باشد آنگاه A و B ناسازگارند.

$A = \{۲, ۴, ۶\} \quad B = \{۱, ۳, ۵\} \implies A \cap B = \emptyset$

تعریف تجربی احتمال: احتمال وقوع یک پیشامد به معنای شانس بیشتر وقوع آن پیشامد در انجام یک آزمایش تصادفی است. تعریف تجربی احتمال بر اساس فراوانی نسبی وقوع یک پیشامد وقتی که به تعداد (دفعات) زیادی آزمایش تصادفی را تکرار کنیم می‌باشد. به عبارت دیگر:

$P_n(A) = \dfrac{f_n(A)}{n}$ ← فراوانی مشاهده‌ی شده‌ی پیشامد A در n بار تکرار آزمایش تصادفی

n ← تعداد تکرارها

به عنوان مثال اگر یک سکه را ۱۰۰۰ بار بیندازیم و ۴۹۵ شیر و ۵۰۵ خط مشاهده کنیم، آنگاه احتمال های تجربی شیر و خط برابرند با:

$P_n(H) = \dfrac{۴۹۵}{۱۰۰۰} \quad , \quad P_n(T) = \dfrac{۵۰۵}{۱۰۰۰}$

تعریف دقیق (ریاضی) احتمال: تعریف دقیق احتمال به صورت حد تجربی احتمال است وقتی $n \to \infty$

$P(A) = \lim_{n \to \infty} P_n(A) = \lim_{n \to \infty} \dfrac{f_n(A)}{n} = \dfrac{n(A)}{n(S)}$ برای مدل احتمال همه یکنواخت

$n(A) \longrightarrow$ تعداد اعضای پیشامد A

$n(S) \longrightarrow$ تعداد اعضای مجموعه S

PAPCO

وظیفه زیرمجموعه کران

تابع احتمال: تابعی از فضای نمونه‌ای S به مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. $P: S \longrightarrow R$

به عبارت دیگر، احتمال تابعی مانند P است که به هر پیشامد A از فضای نمونه S، عدد حقیقی $P(A)$ را به گونه‌ای نسبت می‌دهد که در شرایط موضوع زیر صدق می‌کند:

1. $P(S) = 1$
2. $P(A) \geq 0$
3. برای پیشامدهای مجزای ~~$k_1, k_2, \ldots, k_n$~~ $A_1, A_2, \ldots$ می‌توان نوشت:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \qquad \forall i,j : A_i \cap A_j = \emptyset$$

مدل احتمال روی فضای نمونه متناهی: فرض کنید $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ یک فضای نمونه متناهی باشد، به طوری که:

فضای نمونه	e_1	e_2	e_n	جمع
احتمال	P_1	P_2	P_n	1

اگر پیشامد A به شکل $A = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ تعریف شود، آنگاه احتمال A به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$A = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \quad m \leq n \Longrightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{m} P_i$$

مثال: یک تاس به شکلی است که احتمال آوردن اعداد فرد باهم مساوی ولی احتمال آوردن اعداد زوج متناسب با خود آنهاست. اگر پیشامد A را آوردن عدد بیشتر از ۳ در پرتاب این تاس در نظر بگیریم احتمال A را محاسبه کنید:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\qquad x + 2x + x + 4x + x + 6x = 15x = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{15}$

$$P(x > 3) = P(4) + P(5) + P(6) = \frac{4}{15} + \frac{1}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$$

$P(A\cap B)' = 1 - P(A\cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A\cup B) = P(A') + P(B') \cancel{+} 1 + P(A\cup B)$ ✗

$P(A'\cup B') = P(A') + P(B') - P(A'\cap B') = P(A') + P(B') - P(A'-B) = P(A') + P(B') - P(A') + P(A'\cap B)$

Subject:

Year. Month. Date. $= \cancel{P(A')} + P(B') + P(B-A) = P(B') + P(B) - P(A\cap B)$

$= P(B') + P(B) + P(A\cup B) - P(A) - P(B) = 1 - P(B) - P(A) - P(A\cup B)$

مدل احتمال یکنواخت: در این مدل تمام اعضای فضای نمونه شانس مساوی برای انتخاب شدن دارند و می توان نوشت: $= 1 - P(A\cap B) = P(A\cap B)'$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$P(A\cap B)' = 1 - P(A\cap B) = P(B') + P(B) - P(A') + P(A') - P(A\cap B)$ ✓

$= P(B') - P(A') + P(A') - P(B-A) = P(B') - P(A') + P(A') + P(A'\cap B)$

$= P(A') + P(B') - P(A'-B) - P(A'\cap B') = P(A'\cup B')$

مثال: یک جفت تاس را پرتاب می کنیم، احتمال آوردن مجموع ۷ را به دست آورید.

$A = \{(۳,۴)(۴,۳)(۲,۵)(۵,۲)(۶,۱)(۱,۶)\}$

$$P(A) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

$P(A-M) = P(A) - P(A\cap M) = \frac{۲}{۳} - \frac{۳}{۸} = \frac{۱۶-۹}{۲۴} = \frac{۷}{۲۴}$

$P(A\cap M) = 1 - P(A\cap M)' = 1 - P(A'\cup M') = 1 - \frac{۵}{۸} = \frac{۳}{۸}$

چند قانون احتمال:

۱. $P(\emptyset) = ۰$

۲. $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

۳. $P(A') = 1 - P(A)$

۴. $P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$

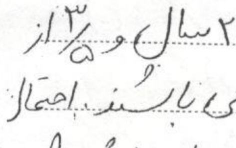
۵) $P(A\cap B)' = P(A'\cup B')$ و $P(A\cup B)' = P(A'\cap B')$ دمورگان

حداکثر ۲۵ سال — بیشتر از ۲۵ سال

مثال: در یک زندان معلوم شده است که ۲/۳ از زندانی ها دارای سن بیشتر از ۲۵ سال و ۳/۵ از زندانی ها مرد و ۵/۸ از زندانی ها زن یا دارای سن حداقل ۲۵ سال می باشند. احتمال اینکه یک زندانی که به طور تصادفی انتخاب شده، زن یا حداقل سن ۲۵ سال باشد را بیابید.

حداکثر — حداکثر ۲۵ سال

A: پیشامد اینکه سن زندانی بیشتر از ۲۵ سال باشد — M: پیشامد مرد بودن زندانی



$P(A) = \frac{۲}{۳}$ — $P(M) = \frac{۳}{۵}$

$\frac{۴۸+۸۰-۹۳}{۱۲۰}$

✓ $P(M'\cap A) = P(M') + P(A) - P(M'\cup A)$ — $P(M'\cup A') = \frac{۵}{۸}$

$= \frac{۲}{۵} + \frac{۲}{۳} - \frac{۳۱}{۴۰} = \frac{۳۵}{۱۲۰} = \frac{۷}{۲۴}$ — $1 - P(M-A)$

مرد با سن بیشتر از ۲۵ سال

$P(M-A) = P(M) - P(M\cap A) = P(M) - [1 - P(M'\cup A')] = \frac{۳}{۵} - \frac{۳}{۸} = \frac{۲۴-۱۵}{۴۰} = \frac{۹}{۴۰}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$P(M'\cap A') = P(A') + P(M') - P(A'\cup M')$$
$$= (1-\tfrac{2}{3}) + (1-\tfrac{3}{5}) - \tfrac{5}{8} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{5} - \tfrac{5}{8} = \tfrac{13}{120}$$

مثال: احتمال اینکه یک هواپیمای جدید، تائید طراحی را به دست آورد برابر $\frac{16}{100}$ و کارایی استفاده از مواد را کسب کند، برابر $\frac{24}{100}$ و احتمال اینکه هر ۲ را کسب کند $\frac{11}{100}$ است.

الف) احتمال اینکه لااقل یکی از ۲ تأیید را به دست آورد چقدر است؟

A: پیشامد اینکه تأیید کارایی را کسب کند.

B: پیشامد اینکه تأیید طراحی را کسب کند.

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$
$$= 0/24 + 0/16 - 0/11 = 0/29$$

ب) احتمال اینکه فقط یکی از دو تأیید را به دست آورد چقدر است؟

$$P(A-B) + P(B-A) = P(A) + P(B) - 2P(A\cap B)$$
$$= 0/24 + 0/16 - 2(0/11) = 0/18$$

دو اصل مهم شمارش:

۱. اصل جمع: اگر عمل A را بتوان به m طریق و عمل B را به n طریق انجام داد، آنگاه A یا B را می‌توان به $m+n$ طریق انجام داد.

مثال: کارمندی برای رفتن از خانه به اداره می‌تواند یکی از سه خط اتوبوس رانی A، B یا C را انتخاب کند و یا یکی از خطوط مینی‌بوس رانی D یا f را انتخاب کند. این کارمند به چند صورت می‌تواند به خانه برود؟

$$m+n = 3+2 = 5$$

۲. اصل ضرب: اگر کار A را بتوان به m طریق و کار B را به n طریق متفاوت انجام داد، آنگاه A و B را می‌توان به $m\times n$ طریق به انجام رساند.

Subject:
Year. Month. Date. ۱۵

مثال: فرض کنید برای صرف ناهار به رستورانی وارد شده اید و تصمیم دارید خوراک گوشت همراه سالاد و نوشیدنی سفارش دهید. اگر این رستوران ۳ نوع خوراک گوشت، ۴ نوع سالاد و ۵ نوع نوشیدنی داشته باشد، به چند طریق می توان سفارش های متفاوت داد؟

$۳ \times ۴ \times ۵ = ۶۰$

مثال: با حروف کلمه ی «تهران» چند کلمه ی ۴ حرفی می توان نوشت اگر:

الف) تکرار مجاز باشد.

$۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ = ۵^۴$

ب) تکرار مجاز نباشد.

$۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۱۲۰$

اصول شمارش:

۱) جایگشت: تعداد حالت های ممکن انتخاب r شی از n شی متمایز به طوری که $(r \leq n)$ باشد را جایگشت یا (ترتیب) نامیده و با نماد $p(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ نشان می دهیم. همان طور که از این تعریف پیداست ترتیب انتخاب این r شی مهم است.

مثال: با ارقام ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ چند عدد سه رقمی بدون تکرار می توان نوشت؟

$p(۵,۳) = \frac{۵!}{(۵-۳)!} = ۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$

مثال: n را طوری تعیین کنید که این تساوی برقرار باشد: $p(n,۴) = ۴۰\, p(n-۲,۱)$

$\frac{n!}{(n-۴)!} = ۴۰ \times \frac{(n-۲)!}{(n-۳)!} \longrightarrow n(n-۱)(n-۳) = ۴۰ \Longrightarrow n = ۵$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲) ترکیب: اگر در انتخاب r شی از n شی متمایز ترتیب انتخاب اشیاء مهم نباشد تعداد کل حالات ممکن را ترکیب نامیده و برابر است با:

$$\boxed{C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \binom{n}{r}}$$

مثال: به چند طریق می توان از کیسه ای که حاوی ۶ مهره ی سفید و ۴ مهره ی سیاه است، ۳ مهره باهم انتخاب کنیم؟ (مهره ها شماره دارند)

$$C(10,3) = \frac{10!}{(10-3)!\,3!} = \frac{10\times 9\times 8\times 7!}{7!\,3!} = 120$$

نکته ⟸ تعداد جایگشت های n شی که در آن n_1 تا مثل هم، n_2 تا مثل هم، ...، n_k تا مثل هم باشند، برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}, \quad \sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

مثال: با حروف کلمه ی "BANANA" چند کلمه ی مختلف می توان ساخت؟ MISSISSIPPI

$$\frac{6!}{3!\,2!} = \frac{6\times 5\times 4\times 3!}{3!\,2!} = 60$$

بسط دوجمله ای:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{j}a^{n-j}b^j + \cdots + b^n$$

مثال: ضریب x^6y^6 در بسط $(2x+y^2)^9$ چند است؟

$$j=3 \longrightarrow \binom{9}{3}(2x)^6(y^2)^3 = \underbrace{\binom{9}{3}\times 2^6}_{\text{ضریب}}\,x^6y^6$$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ۱۷

تمرین: به روش تحلیلی تساوی های زیر را ثابت کنید:

$$1)\ \binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$$

$$2)\ \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

مثال: ۳ کتاب ریاضی و ۴ کتاب اقتصاد، ۵ کتاب آمار که با هم متفاوت اند، به چند طریق می توان در یک قفسه کنار هم قرار داد؟ (به طوری که کتاب های هم موضوع کنار هم باشند)

$$3!\,(5! \times 4! \times 3!)$$

چیدن کتابها اقتصاد بین ریاضی

ب) احتمال اینکه کتابها هم عنوان (موضوع) کنار هم باشند؟

$$3! \times 4! \times \frac{8!}{(8-5)!} = 4! \times 8!$$

چیدن کتابهای ریاضی

چیدن کتب آمار بین ریاضی و اقتصاد

مثال: از بین ۶ مرد و ۶ زن می خواهیم یک کمیته ی ۶ نفره تشکیل دهیم. این کار به چند طریق امکان پذیر است اگر:

الف) کمیته شامل ۳ زن و ۳ مرد باشد.

$$\binom{6}{3} \times \binom{6}{3}$$

$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} \qquad \frac{10!}{4!\,6!} = 210 \qquad \frac{10!}{5!\,5!} \qquad 7 \times 6 \times 5 \times 7 \times 8 = 42$$

هیچ کدام از دو نفر نباشند

ب) ۲ نفر از مردها نخواهند با هم انتخاب شوند.

$$\binom{2}{0}\binom{10}{6} + \binom{2}{1}\binom{10}{5} = 294$$

ج) ۲ نفر از زنان بخواهند با هم باشند و یا هیچ کدام انتخاب نشوند.

$$\binom{2}{0}\binom{10}{6} + \binom{2}{2}\binom{10}{4}$$

مثال: از بین ۱۲ داوطلب عضویت در هیئت رئیسه یک موسسه یک نفر به عنوان رئیس، یک نفر معاون و یک نفر خزانه دار توسط اعضای موسسه انتخاب شده اند. تعداد راه های ممکن برای انتخاب این هیئت رئیسه را به دست آورید.

$$P(12, 3) = \frac{12!}{9!} = 12 \times 11 \times 10$$

PAPCO

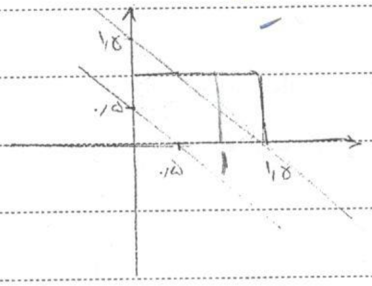
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: از بین ۶ معلم و ۴ دانش آموز چند کمیته ۵ نفری مرکب از ۳ معلم و ۲ دانش آموز می توان تشکیل داد؟

$$\binom{6}{3} \times \binom{4}{2}$$

مثال: دو عدد حقیقی بین صفر و یک به تصادف انتخاب می کنیم مطلوب است محاسبه احتمال این که مجموع این دو عدد بین ۰/۵ و ۱/۵ باشد.

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(S)}$$



$0/5 < x + y < 1/5$

$S(A) = 1 - (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) \times 2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$P(A) = \frac{\frac{3}{4}}{1} = \frac{3}{4}$$

احتمال نقطه برسطر، خط در سطح، سطح در حجم صفر است.

نکته ← اگر بخواهیم n نفر را به k گروه مشخص به حجم های n_1 و n_2 و ... و n_k تقسیم کنیم تعداد راه های ممکن برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n_k}{n_k} = \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!} \times \frac{(n-n_1)!}{(n_2)!\,(n-n_1-n_2)!} \times \cdots$$

$$\frac{n_k!}{n_k!} \quad \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

مثال: فرض کنید می خواهیم ۶ نفر را به ۳ گروه ۲ نفره تقسیم کنیم به طوری که گروه اول برای کار در حسابداری گروه دوم به عنوان کارمند و گروه سوم به عنوان بازرس در نظر گرفته شوند به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

$$\frac{6!}{2! \times 2! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2! \times 2!} = 90$$

نکته ← چنانچه در نکته ی فوق صرفاً هدف گروه بندی باشد آنگاه باید تعداد حالات کل برفاکتوریل تعداد گروه ها تقسیم کنیم
هم حجم باشند

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!\, k!}$$

$n_1 = n_2 = \cdots = n_k$ علامات و تنها در صورتی صحیح است

PAPCO

چنانچه بخواهیم n شیء را به f_1 گروه n_1 تایی، f_2 گروه n_2 تایی، ...، f_k گروه n_k تایی تقسیم کنیم، اگر گروه بندی مهم باشد تعداد کل حالات برابر است با

$$\frac{n!}{(n_1!)^{f_1}\,(n_2!)^{f_2} \cdots (n_k!)^{f_k} \times f_1! \cdots}$$

Subject:
Year. Month. Date. ۱۷

اگر نفرات پشت سر هم نباشند:

$$\frac{n!}{(n_1!)^{f_1} f_1! \, (n_2!)^{f_2} f_2! \cdots (n_k!)^{f_k} f_k!}$$

۵ نفر < ۲ ، ۲ ، ۱ $\quad \frac{5!}{2!\,2!\,2!} = 5\times 3 = 15$

۷ نفر $\xrightarrow{\text{گروه}}$ ۲ ، ۲ ، ۳

مثال: اگر ۱۲ نفر را بخواهیم به ۴ گروه ۳ نفره تقسیم کنیم این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

تعمیم: ۲۰ نفر به ۴ گروه ۳ نفره و ۲ گروه ۴ نفره

$$\frac{12!}{3!\times 3!\times 3!\times 3!\times 4!} = 330\times 56\times 5 \qquad \frac{20!}{(3!)^4\,4!\,(4!)^2\,2!}$$

بررسی شود

مثال: یک تیرانداز به طور متوسط نصف تیرهای خود را به هدف می زند. در صورتی که این تیرانداز ۵ بار شلیک نماید. احتمال اینکه:

$\frac{5!}{3!\,2!} = 10$

الف) ۳ بار تیرهای خود را به هدف بزند چقدر است؟

$$\binom{5}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 10\times\tfrac{1}{8}\times\tfrac{1}{4} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

ب) حداقل ۳ بار به هدف بزند؟

$$\binom{5}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \binom{5}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^4\left(\tfrac{1}{2}\right) + \binom{5}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

مثال: اگر $P(B)=0.5$ و $P(A\cup B)=0.7$ باشد، با شرط اینکه ۲ پیشامد A و B مستقل باشند، $P(A)$ کدام است.

نکته: دو پیشامد A و B را مستقل گوییم هرگاه: $P(A\cap B) = P(A).P(B)$

$P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B) \geq P(A)+P(B)-1$

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A).P(B)$$

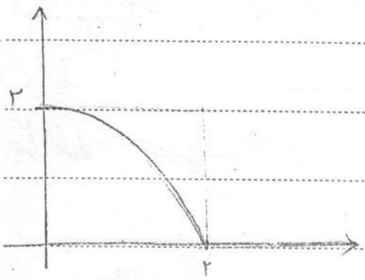
$$P(A\cup B) = P(A)(1-P(B))+P(B)$$

$$0.7 = P(A)(1-0.5)+0.5 \longrightarrow P(A) = \frac{0.2}{0.5} \Rightarrow P(A) = 0.4$$

مثال: دو عدد حقیقی به تصادف در فاصله $[0,2]$ انتخاب می کنیم، احتمال اینکه مجموع مربعات آن دو عدد کوچکتر یا مساوی ۴ باشد را بیابید.

$a^2+b^2 \leq 4 \longrightarrow$ دایره ای به شعاع ۲

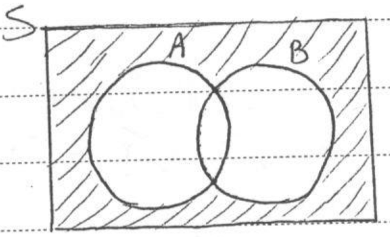
$A_1A_2 \quad A_1A_3 \quad A_3A_4 \quad A_5$



$$P(A) = \frac{S(A)}{S(S)} = \frac{\frac{\pi\times 4}{4}}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: در تصویر زیر کدام بخش هاشور خورده است؟



الف) $A \cup B$ ب) $A \cup B'$

ج) $A' \cap B'$ د) $A - B'$

مثال: احتمال اینکه مردی تا ده سال دیگر زنده بماند ۱/۵ و همین احتمال برای همسر او ۱/۴ است. مطلوب است احتمال اینکه:

الف) هر دو تا ۱۰ سال دیگر زنده بمانند.

$P(A\cap B) = P(A) . P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$

ب) لااقل یکی از آنها تا ۱۰ سال دیگر زنده باشد.

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{20} = \frac{5+4-1}{20} = \frac{8}{20}$

ج) هیچکدام تا ۱۰ سال دیگر زنده نباشند.

$P(A'\cap B') = 1 - \frac{8}{20} = \frac{12}{20}$ یا $(1 - (\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{20})) = \frac{12}{20}$

احتمال شرطی: گاهی اوقات اطلاع از وقوع (یا عدم وقوع) یک پیشامد بر وقوع یک پیشامد جدید تأثیر گذاشته و احتمال وقوع آن را کم یا زیاد می کند. به عنوان مثال در آزمایش پرتاب یک تاس اگر بدانیم عدد بدست آمده زوج است آنگاه این اطلاع پیش باعث می گردد که احتمال وقوع پیشامد {۲} از ۱/۶ به ۱/۳ افزایش یابد همچنین احتمال وقوع پیشامد {۳} از ۱/۶ به صفر کاهش می یابد.

احتمال $P(A|B)$ احتمال وقوع پیشامد A به شرط اینکه می دانیم پیشامد B حتماً رخ داده است نامیده و برابر است با:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$= \frac{n(A\cap B)}{n(B)}$ اگر اعضای S هم شانس باشند

حذف

قانون ضرب احتمال: $P(A\cap B) = P(A|B)P(B) = \boxed{P(B|A)P(A)}$

۳ → ۲ ، ۱ $\frac{3!}{2!} = 3$ A_1A_2 A_1A_3 A_2A_3

A_3 A_2 A_1

Subject:
Year. Month. Date. ۱۸

تعمیم: $P(A_1\cap A_2\cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2\cap A_1)\dots P(A_n|A_1\cap \dots \cap A_{n-1})$

مثال: در ظرفی ۵ مهره ی قرمز، ۶ مهره ی سبز و ۴ مهره ی سفید داریم. از این ظرف، ۵ مهره به تصادف خارج می کنیم. احتمال اینکه اولی قرمز، دومی سبز، سومی قرمز و چهارمی سفید و پنجمی سبز باشد را در دو حالت با جایگذاری و بدون جایگذاری به دست آورید.

۵R
۶G
۴W

با جایگذاری: $P(RGRWG) = P(R)P(G)P(R)P(W)P(G)$

$= \frac{5}{15}\times\frac{6}{15}\times\frac{5}{15}\times\frac{4}{15}\times\frac{6}{15}$

بدون جایگذاری:

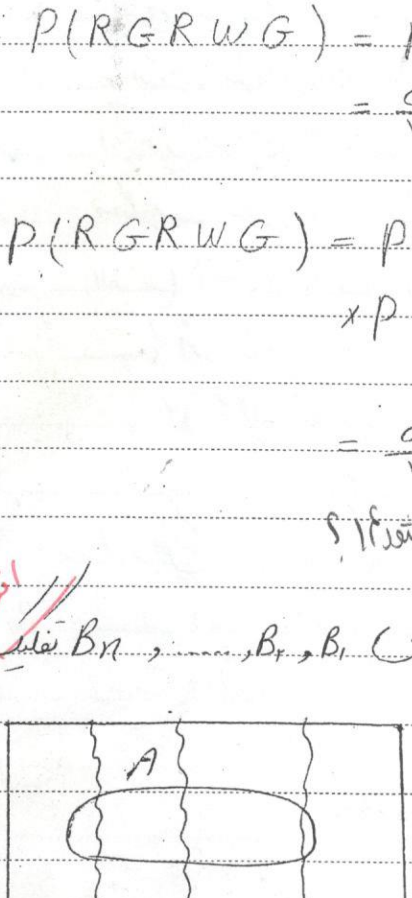
$P(RGRWG) =$ P(اولی قرمز) P(دومی سبز | اولی قرمز) P(سومی قرمز | اولی قرمز و دومی سبز) × P(چهارمی سفید | اولی قرمز و دومی سبز و سومی قرمز) × P(پنجمی سبز | اولی قرمز و دومی سبز و سومی قرمز و چهارمی سفید)

$= \frac{5}{15}\times\frac{6}{16}\times\frac{4}{13}\times\frac{4}{12}\times\frac{5}{11}$

باید بشود ۱۴؟

قانون احتمال کل: هرگاه فضای نمونه ی S را به n پیشامد مجزای $B_1, B_2, \dots, B_n$ تفکیک (افراز) کنیم، آنگاه احتمال وقوع هر پیشامد دلخواه A به صورت زیر محاسبه می گردد:

(صفحه ی بعدی)



$B_i\cap B_j=\emptyset \qquad \bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n)$$

قانون ضرب $\Rightarrow P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

توماس بیز (۱۷۶۰-۱۷۰۲) کشیش و فیلسوف انگلیسی

قانون بیز: از ترکیب قانون ضرب احتمال و قانون احتمال کل، احتمال شرطی وقوع B_k با شرط اینکه A رخ داده است برابر است:

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

$$\frac{P(A \cap B_k)}{P(A)}$$

مثال: یک مؤسسه مشاوره‌ای ماشین‌های مورد نیازش را از ۳ آژانس تهیه می‌کند. اگر درصد ماشین‌های تهیه شده از آژانس‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب ۲۰، ۲۰ و ۶۰ درصد باشد، به طوری که ۱۰ درصد از ماشین‌های آژانس ۱ معیوب، ۱۲ درصد از آژانس ۲ معیوب و ۴ درصد از ماشین‌های آژانس ۳ معیوب می‌باشد. مطلوب است محاسبه‌ی:

الف) احتمال اینکه ماشین کرایه شده معیوب باشد

ب) اگر بدانیم ماشین کرایه شده توسط مؤسسه معیوب است. احتمال اینکه از آژانس ۳ کرایه شده باشد را به دست آورید.

$1 \longrightarrow 20 \xrightarrow{\text{معیوب}} 10$

$2 \longrightarrow 20 \xrightarrow{\quad} 12$

$3 \longrightarrow 60 \xrightarrow{\quad} 4$

A: پیشامد اینکه ماشین کرایه شده معیوب است.

B_i: پیشامد اینکه ماشین کرایه شده از آژانس iام کرایه شده باشد

PAPCO

۸ معلم
۴ مدرسه

$\xrightarrow{\text{به هر مدرسه ۲ معلم}}$ یک معلم

$$\frac{\binom{8}{4} 4^4}{4^8} = \frac{\frac{8!}{4!}}{4^4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 4 \times 4 \times 4}$$

غ

Subject:

Year. Month. Date. ۱۹

الف) $P(A) = P(A|B_1)\,P(B_1) + P(A|B_2)\,P(B_2) + P(A|B_3)\,P(B_3)$

$$= \frac{10}{100} \times \frac{20}{100} + \frac{12}{100} \times \frac{20}{100} + \frac{4}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{68}{1000}$$

ب) $P(B_3|A) = \dfrac{P(A|B_3)\,P(B_3)}{P(A)} = \dfrac{\frac{4}{100} \times \frac{60}{100}}{\frac{68}{100}} = \dfrac{24}{68} = \dfrac{12}{34} = \dfrac{6}{17} = 0.35$

دو پیشامد مستقل: دو پیشامد A و B را مستقل گوییم، هرگاه وقوع یکی بر دیگری تأثیر نداشته باشد و یا به عبارت دیگر:

$P(A|B) = P(A)$

یا (اطلاع از وقوع یکی در دیگری تأثیر ندارد)

$P(B|A) = P(B)$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A\cap B) = P(A).P(B)$$

هرگاه A و B مستقل باشند، آنگاه می‌توان نوشت:

۱) $P(A'\cap B) = P(A')\,P(B)$

۲) $P(A\cap B') = P(A)\,P(B')$

۳) $P(A'\cap B') = P(A')\,P(B')$

بررسی شود

مثال: یک زوج تاس را پرتاب می‌کنیم تا جمع ۵ یا ۷ ظاهر شود. احتمال اینکه مجموع ۵ ابتدا ظاهر شود را به دست آورید.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$E_n \Rightarrow$ پیشامد اینکه مجموع ۵ در پرتاب nام ظاهر شود و در $(n-1)$ پرتاب اول ۵ یا ۷ ظاهر نشده باشد.

مجموع ۵ : $A = \{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}$

مجموع ۷ : $B = \{(2,5),(5,2),(1,6),(6,1),(3,4),(4,3)\}$

$P(E_1) = \frac{4}{36} \qquad P(E_2) = [1 - P(A) - P(B)]\, P(A) = \left(\frac{26}{36}\right)\left(\frac{4}{36}\right)$

$P(E_3) = [1-P(A)-P(B)]^2 P(A) \quad \ldots\ldots \quad P(E_n) = [1-P(A)-P(B)]^{n-1} \cdot P(A)$

$P($مجموع ۵ زودتر از مجموع ۷ ظاهر شود$) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots = \frac{4}{36}\left[1 + \frac{26}{36} + \left(\frac{26}{36}\right)^2 + \cdots\right] \rightarrow$

$= \dfrac{\frac{4}{36}}{1 - \frac{26}{36}} = \dfrac{\frac{4}{36}}{\frac{10}{36}} = 0/4$

نکته ← تعداد حالت های قرار دادن n توپ متمایز در r جعبه متمایز برابر است با:

$\underset{1}{\circ}\ \underset{2}{\circ}\ \underset{3}{\circ}\ \ldots\ldots\ \underset{n}{\circ}$

$\cancel{n \times n \times n \times \cdots \times n = n^r}$

			......		......		
1	2	3		k		n	

$\underbrace{r \times r \times \cdots \times r}_{r\ \text{تا}} = r^n$

تعداد حالت های قرار دادن توپ اول در جعبه

نکته ← در صورتی که توپ ها مشابه باشند تعداد حالت های قرار دادن این n توپ در r جعبه متمایز مانند حل معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = n$ و یافتن تعداد جواب های صحیح و نامنفی این معادله است.
$x_1 \geq 0 \;\ldots\ldots\; x_r \geq 0$

$\binom{n+r-1}{r-1} \longrightarrow$ تعداد جواب های صحیح و نامنفی

چنانچه لازم باشد در هر جعبه حداقل یک توپ قرار بگیرد، آنگاه تعداد حالت های ممکن برابر است با جواب های صحیح و مثبت معادله ی زیر:

مثال: ۸ معلم را می خواهیم به ۴ مدرسه تقسیم کنیم. چقدر احتمال دارد که به هر مدرسه حداقل یک معلم برسد.

$n(S) = 4^8, \quad P(A) = 1 - \left[\binom{4}{1}\frac{3^8}{4^8} - \binom{4}{2}\frac{2^8}{4^8} + \binom{4}{3}\frac{1^8}{4^8}\right] \rightarrow$

حداقل به یک مدرسه معلم نرسد

Subject:
Year. Month. Date. ۲۰

$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ $\quad \binom{n-1}{r-1} \longrightarrow$ تعداد جواب های صحیح و نامنفی

$x_1 > 0 \;\cdots\; x_r > 0$

مثال: می خواهیم ۲۰ میلیون تومان را در ۴ فعالیت اقتصادی سرمایه گذاری کنیم. هر سرمایه گذار باید مضربی از یک میلیون تومان بوده و چنانچه بخواهیم در این فعالیت ها سرمایه گذاری کنیم لازم است، حداقل سرمایه گذاری به ترتیب ۲، ۲، ۳ و ۴ میلیون تومان در ~~هر فعالیت~~ این فعالیت ها انجام شود به چند طریق این کار امکان پذیر است؟ اگر:

الف) بخواهیم در همه فعالیت ها سرمایه گذاری کنیم.

ب) بخواهیم در حداقل ۳ فعالیت سرمایه گذاری کنیم.

الف) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \qquad x_1 \geq 2 ,\ x_2 \geq 2 ,\ x_3 \geq 3 \quad x_4 \geq 4$

$(x_1 - 2) + (x_2 - 2) + (x_3 - 3) + (x_4 - 4) = 20 - 2 - 2 - 3 - 4$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 9 \qquad y_i \geq 0$

$$\to \binom{9+4-1}{4-1} = \binom{12}{3} = \frac{\overset{2}{\cancel{12}} \times 11 \times 10 \times \cancel{9!}}{\cancel{9!} \times \cancel{3!}} = 220 \qquad 3 \times 2 = 6$$

ب) $x_1 + x_2 + x_3 = 20 \longrightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 20 - 2 - 2 - 3 = 13$

$x_1 + x_3 + x_4 = 20 \longrightarrow y_1 + y_3 + y_4 = 11$

$x_1 + x_2 + x_4 = 20 \longrightarrow y_1 + y_2 + y_4 = 12$

$x_2 + x_3 + x_4 = 20 \longrightarrow y_2 + y_3 + y_4 = 11$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \longrightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 9$

تعداد حالات کل $\Rightarrow \binom{13+3-1}{3-1} + \binom{11+3-1}{3-1} + \binom{12+3-1}{3-1} + \binom{11+3-1}{3-1} + \binom{9+4-1}{4-1}$

$$= \underset{105}{\binom{15}{2}} + \underset{78}{\binom{13}{2}} + \underset{91}{\binom{14}{2}} + \underset{78}{\binom{13}{2}} + \underset{220}{\binom{12}{3}} = 572$$

$\dfrac{8!}{(2!)^4}$ چقدر احتمال دارد که به هر مدرسه دقیقا دو معلم برسد؟

4^8

Subject:
Year. Month. Date. ( )

بررسی شود

تمرین: در یک بازی، بازیکنی ۲ تاس را پرتاب می‌کند. اگر مجموع ۲ عدد ظاهر شود، ۲ یا ۳ یا ۱۲ باشد، بازنده است و اگر مجموع ۷ یا ۱۱ باشد برنده است. اگر نتیجه عدد دیگری باشد بازی ادامه پیدا می‌کند تا اینکه نتیجه‌ی قبلی را به دست آورد و یا نتیجه‌ی ۷ حاصل شود. چنانچه نتیجه‌ی ۷ ظاهر شود بازیکن بازنده است و اگر نتیجه‌ی قبلی ~~پیش~~ از ۷ ظاهر شود بازیکن برنده است. احتمال برنده شدن این بازیکن را حساب کنید. ۱۹۱

۲ → بازنده
۳ → بازنده
۴
۵
۶
۷ → برنده
۸
۹
۱۰
۱۱ → برنده
۱۲ → بازنده

مثال: یک تیم بسکتبال ۳ نفره، شامل یک مدافع، یک نفر خط حمله و یک نفر در مرکز است. اگر از هر یک از سه تیم با ترکیب فوق یک نفر به تصادف انتخاب شود،

الف) احتمال اینکه یک تیم کامل انتخاب شود را به دست آورید.

ب) احتمال اینکه هر ۳ نفر انتخاب شده بازیکن یک موقعیت باشند را بیابید.

تعداد کل حالات $\Rightarrow \binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{3}{1} = 27$

الف) $\dfrac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{27} = \dfrac{6}{27} = \dfrac{2}{9}$

ب) $\dfrac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{27} = \dfrac{3}{27} = \dfrac{1}{9}$

مثال: یک گروه از افراد شامل ۵ پسر و ۵ دختر به تصادف در یک ردیف می‌نشینند. احتمال اینکه فرد قرار گرفته در موقعیت iام دختر باشد را به دست آورید:

PAPCO

۶۲۵

میعادی حسین زاده
جابر قاسمی
نیساری
عطاری
کوشش
صمدیان
لطفی
فرجی
داوری

Subject:
Year. Month. Date. ۲۱/۱

$|\,|\,|\,\cdots\cdots\,|g|\,\cdots\cdots\,|\,|$

$1\ 2 \quad\quad i \quad\quad b+g$

یک را می گذاریم و تعداد حالت های ممکن را برای باقی انتخاب ها بدست می آوریم

$$\frac{(b+g-1)!\binom{g}{1}}{(b+g)!} = \frac{g}{b+g}$$

حل: بررسی شود.

تمرین: شهری ۴ تعمیرکار تلویزیون دارد. اگر ۴ تلویزیون خراب داشته باشیم، به چند طریق می توان (با چه احتمالی) دقیقاً به i تعمیرکار مراجعه می شود؟ (مسئله را برای $i=1,\dots,4$ و در دو حالت مشابه و غیر مشابه بودن تلویزیون ها حل کنید)

تلویزیون غیر مشابه $\rightarrow \underbrace{n\times n\times n\times n\times \cdots\cdots \times n}_{r} = n^r \rightarrow 4^4 = 4\times4\times4\times4 = 256$

تلویزیون مشابه $\rightarrow \binom{n+r-1}{r-1} = \binom{4+4-1}{4-1} = \binom{8-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7\times6\times5\times4!}{3!4!} = 35$

مثال: یک مؤسسه بیمه افراد را به سه گروه با ریسک بالا، ریسک متوسط و ریسک پایین تقسیم بندی می کند. اطلاعات این مؤسسه نشان می دهد که احتمال تصادف کردن افراد با ریسک بالا ۳۰٪، ریسک متوسط ۱۵٪ و ریسک پایین ۵٪ است. اگر ۲۰٪ از افراد جامعه ریسک بالا، ۵۰٪ ریسک متوسط و ۳۰٪ دارای ریسک پایین باشند، چه نسبتی از افراد جامعه در یک سال تصادف می کنند. اگر فرد بیمه شده ی A در یک سال تصادف نداشته باشد، احتمال اینکه او متعلق به افراد با ریسک بالا باشد چقدر است؟

٪۲۰ ریسک بالا —احتمال تصادف→ ۳۰٪

٪۵۰ ریسک متوسط → ۱۵٪

٪۳۰ ریسک پایین → ۵٪

A: پیشامد تصادف یک فرد خاص در طول سال

$$P(A) = P(A|①)P(①) + P(A|②)P(②) + P(A|③)P(③)$$

$$= \frac{30}{100}\times\frac{20}{100} + \frac{15}{100}\times\frac{50}{100} + \frac{5}{100}\times\frac{30}{100} = \frac{15}{100}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{4}{1}}{4^4} = \frac{1}{64}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{4}{2}\left[2^4-2\right]}{4^4} = \frac{6\times14}{4^4} = \frac{21}{64}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{4}{3}\left[3^4-\binom{3}{2}(2^4-2)-\binom{3}{1}\right]}{4^4}$$

$$= \frac{4(81-42-3)}{4^4} = \frac{36}{64}$$

$$P(X=4) = \frac{4!}{4^4} = \frac{6}{64}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\frac{?}{100} \cdot 1 - \frac{30}{100}$ چرا ۸۵؟ ۱۰۰ باید بشود

ب) $P(① | A') = \frac{P(A'|①)\,P(①)}{P(A')} = \frac{\frac{70}{100} \times \frac{20}{100}}{1 - \frac{15}{100}} = \frac{14}{85}$

مثال: ۷ جایزه را می خواهیم بین ۱۰ دانش آموز تقسیم کنیم. اگر هیچ دانش آموزی بیش از یک جایزه نگیرد به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

انتخاب ۷ نفر از ۱۰ نفر

$\binom{10}{7} \times 7!$ ← تقسیم ۷ جایزه بین ۷ نفر

مثال: به چند طریق می توان ۱۲ نفر را به ۳ شورای ۴ نفره که اولی برای مدیریت، دومی برای حفاظت و سومی را برای امور مالی می باشد تقسیم نمود؟

ب) به چند طریق می توان این ۱۲ نفر را به ۳ گروه ۴ نفره تقسیم نمود.

الف) $\frac{12!}{4!\,4!\,4!}$ راه دوم → $\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}$

ب) $\frac{12!}{4!\,4!\,4!\,3!}$ ← ترتیب گروه مهم نیست ممکن است هر گروه ۳! بار جا بپذیرد.

بررسی شود

مثال: ۲۰ نفر را در نظر بگیرید احتمال اینکه در ۱۲ ماه سال ۴ ماه هر کدام ۲ تولد و ۴ ماه هر کدام ۳ تولد داشته باشد را بیابید.

$\frac{12!}{4!\,8!} \times \frac{20!}{8!\,12!}$

$n(S) = 12^{20}$

ترتیب مهم است پس به ۲! تقسیم می کنیم ، انتخاب از ۸ $\frac{8!}{4!\,4!}$

$n(A) = \binom{12}{4}\binom{20}{8} \times \frac{8!}{2!\,2!\,2!\,2!} \times \ldots \times \binom{8}{4} \times \frac{12!}{3!\,3!\,3!\,3!}$

$\frac{12!}{4!\,8!} \times \frac{20!}{8!\,12!} \times \frac{8!}{4!\,4!}$ درست

تقسیم به ۴ گروه ۲ نفری و ترتیب مهم

یعنی تقسیم ۲۰ نفر به ۴ گروه ۲ نفره و ۴ گروه ۳ نفره

$\frac{20!}{(2!)^4\,(3!)^4} \times \frac{12!}{4!\,4!\,4!}$ چرا؟ $\frac{20!}{(2!)^4(3!)^4}$

مثال: ۱۰ وزنه بردار در یک مسابقه شرکت دارند به طوری که ۳ نفر از آنها آمریکایی، ۴ نفر روسی ۲ نفر چینی و یک نفر کانادایی هستند. اگر امتیاز کسب شده به نام کشور وزنه بردار و سپس قرار دارن این ۸ گروه در ۸ ماه انتخابی از ۱۲ ماه یعنی ضرب در $\binom{12}{8} \times 8!$

جواب صحیح $\frac{12!}{4!\,8!} \times \frac{20!}{8!\,12!} \times \frac{8!}{(2!)^4} \times \frac{8!}{4!\,4!} \times \frac{12!}{(3!)^4} = \frac{20!\;12!}{(2!)^4\,(3!)^4\,(4!)^3}$

Subject:
Year. Month. Date. ۴۲

ثبت شود، چند نتیجه ممکن از نظر امتیاز می تواند وجود داشته باشد؟ چنانچه آمریکا یک وزنه بردار در ۳ نفر اول و ۲ وزنه بردار در ۳ نفر آخر داشته باشد، آنگاه نتایج ممکن به چند صورت خواهد بود؟

۱) ۳A ۳R ۲C ۱K $\frac{۱۰!}{۳!\,۴!\,۲!\,۱!}$

۲) $۳ \times ۳ \times \frac{۷!}{۴!\,۲!\,۱!}$

متغیرهای تصادفی:

یک مدل احتمال با فضای نمونه ی S را در نظر بگیرید. تابع حقیقی X را که دامنه ی آن S و برد آن زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی است را در نظر می گیریم. تابع X یک متغیر تصادفی روی مدل این احتمال نامیده می شود هرگاه، هر زیر مجموعه دلخواه از فضای نمونه را به مجموعه ی اعداد حقیقی متناظر کند. در واقع تابع X مجموعه ی S را که ممکن است عددی نباشد به یک مجموعه ی عددی تبدیل می کند.

مثال: سکه ای را دو بار می اندازیم. اگر متغیر تصادفی X را برابر تعداد شیرها در این دو پرتاب تعریف کنیم، آنگاه می توان نوشت:

$S = \{TT, TH, HT, HH\}$

$X(TT) = ۰ \qquad X(TH) = X(HT) = ۱ \qquad X(HH) = ۲$

PaPCO

Iatah ۲۶/۲۴ ۲۶/۴۵ ۲۶/۲۶

Subject:
Year. Month. Date. ( )

انواع متغیرهای تصادفی : همانطور که گفته شد یک متغیر تصادفی تابعی حقیقی است که دامنه ی آن فضای نمونه ای و برد آن مجموعه ی اعداد حقیقی می باشد. با توجه به اینکه در حالت کلی توابع به دو گروه پیوسته و گسسته تقسیم می شوند لذا متغیرهای تصادفی نیز بر دو نوع پیوسته و گسسته هستند :

الف) متغیرهای تصادفی گسسته : اگر برد یا تکیه گاه متغیر تصادفی یک مجموعه ی متناهی و یا یک مجموعه نامتناهی اما شمارش پذیر باشد، آنگاه متغیر تصادفی از نوع گسسته است و فقط مقادیر مجزا را اختیار می کند. به عنوان مثال متغیرهای تصادفی زیر گسسته اند :

۱) مجموع اعداد رو شده در پرتاب دو تاس (X) ۲) تعداد پرتاب های لازم برای رسیدن به شیر در پرتاب سکه (Y)

$$S_X = \{2, 3, \ldots, 12\}$$
$$S_Y = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

تابع احتمال :

تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته X را با $P_X(x)$ نشان داده و با ضابطه ی زیر تعریف می کنیم:

$$P_X = S_X \longrightarrow [0, 1] \qquad P_X(x) = P(X = x)$$

تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته X دارای خواص زیر می باشد :

۱) $0 \leq P_X(x) \leq 1$

۲) $\sum_{S_X} P_X(x) = 1$

PAPCO

متغیر تصادفی X را پیوسته گوییم هرگاه، برد آن شمارش ناپذیر باشد.

Subject:

Year. Month. Date. ۲۳

تابع چگالی احتمال:

تابع $f_X(x)$ را تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته‌ی X گوییم هرگاه دارای خواص زیر باشد:

۱) به ازای هر مقدار دلخواه از مقادیر X، $f_X(x) \geq 0$ باشد.

۲) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

۳) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{S_X} f_X(x)\,dx = 1$

مثال: تابع احتمال دو متغیر تصادفی X و Y را در مثال قبل به دست آورید.

X	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$P_X(x)$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

$= \frac{6-|x-7|}{36}$

$P(X=۳) = P(۱,۲) + P(۲,۱) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{۲}{۳۶}$

$P(X=۴) = P(۱,۳) + P(۳,۱) + P(۲,۲) = \frac{۳}{۳۶}$

$P_Y(۱) = P(Y=۱) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P_Y(۲) = P(Y=۲) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P_Y(۳) = P(Y=۳) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ ...... $P_Y(y) = (\frac{1}{2})^y$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع زیر در شرایط تابع احتمال صدق کند.

$$P_X(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{3^x}, & x=0,1,2,3,\dots\\ 0, & \text{o.w (سایر مقادیر)}\end{cases}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{a}{3^x}=1 \longrightarrow a\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=a\times\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3a}{2}=1 \Longrightarrow \boxed{a=\frac{2}{3}}$$

مثال: مقدار c را طوری تعیین کنید که تابع زیر در شرایط تابع چگالی احتمال صدق کند.

$$f_X(x)=\begin{cases}cxe^{-x^2}, & x>0\\ 0, & \text{o.w}\end{cases}$$

$$\int_0^{\infty}cxe^{-x^2}\,dx=1 \longrightarrow -\frac{1}{2}c\int_0^{\infty}-2xe^{-x^2}\,dx=\frac{-c}{2}\times e^{-x^2}\Big]_0^{\infty}$$

$$\Longrightarrow \frac{c}{2}=1 \longrightarrow \boxed{c=+2}$$

تابع توزیع:

تابع توزیع متغیر تصادفی X که یک تابع حقیقی مقدار روی بازه‌ی صفر و یک $[0,1]$ است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_X(x)=P(X\leq x)$$

این تابع دارای خواص زیر است:

۱) به ازای هر x ← $0\leq F_X(x)\leq 1$

۲) تابع توزیع حداقل از راست پیوسته است یعنی: $F_X(x^+)=F_X(x)$

۳) $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$

تذکر: تابع توزیع در دو حالت پیوسته و گسسته به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$F_X(x)=\begin{cases}\sum_{-\infty}^{x} P(X=t)=\sum_{-\infty}^{x} P_X(t)\\ \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\end{cases}$$

مثال: تابع توزیع متغیرهای تصادفی X و Y را در آزمایش پرتاب دو تاس و تعداد پرتاب های لازم برای رسیدن به اولین شش را به دست آورید.

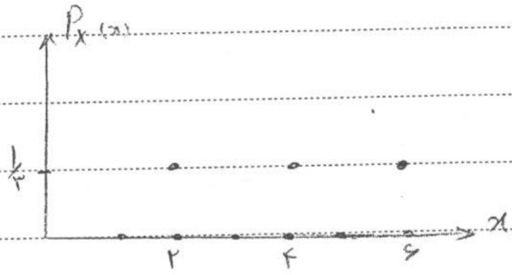
$$F_X(x)=\begin{cases}0 & , x<2\\ \frac{1}{36} & , 2\leq x<3 \longrightarrow P(X=2.5)=\\ \frac{3}{36} & , 3\leq x<4\\ \frac{6}{36} & , 4\leq x<5\\ \frac{10}{36} & , 5\leq x<6\\ \frac{15}{36} & , 6\leq x<7\\ \frac{21}{36} & , 7\leq x<8\\ \frac{26}{36} & , 8\leq x<9\\ \frac{30}{36} & , 9\leq x<10\\ \frac{33}{36} & , 10\leq x<11\\ \frac{35}{36} & , 11\leq x<12\\ \frac{36}{36} & , 12\leq x\end{cases}$$

مثال: کیسه‌ای محتوی ۳ بلیط به شماره‌های ۱و۲و۳ است. از این کیسه به تصادف ۲ بلیط خارج می‌کنیم اگر متغیر تصادفی X را برابر مجموع دو عدد به دست آمده در نظر بگیریم مطلوب است محاسبه‌ی تابع احتمال و تابع توزیع و رسم نمودار آن.

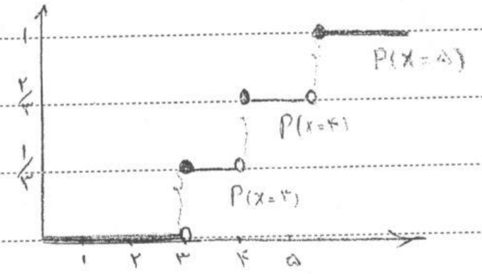
$S = \{(1,2)\ (1,3)\ (2,3)\}$

$S_X = \{3, 4, 5\}$

X	۳	۴	۵	جمع
$P_X(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	۱



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 3 \\ \frac{1}{3} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{2}{3} & 4 \leq x < 5 \\ 1 & 5 \leq x \end{cases}$$



همانطور که ملاحظه می‌کنیم تابع توزیع یک تابع غیر نزولی و از راست پیوسته است، در بی‌نهایت مقدار یک و در $-\infty$ مقدار صفر را اختیار می‌کند. چنانچه متغیر تصادفی مورد نظر گسسته باشد با استفاده از شکل تابع توزیع می‌توان به نحوه‌ی پخش جرم احتمال در نقاط پی برد. به این ترتیب که میزان پرش در هر نقطه برابر است با احتمال آن نقطه و در نقاطی که پرش وجود ندارد متغیر تصادفی مربوطه هیچ گونه جرمی در آنجا ندارد.

چگونه می‌توان با استفاده از تابع توزیع احتمال در یک بازه یا نقطه را محاسبه نمود؟

همانطور که دیدیم با داشتن تابع احتمال یا تابع چگالی احتمال می‌توانستیم تابع توزیع متغیر تصادفی مورد نظر را به دست آوریم و در واقع تابع توزیع این متغیر برابر بود با احتمال اینکه متغیر تصادفی X در بازه‌ی $(-\infty, x]$ قرار بگیرد. اما عکس این کار نیز امکان‌پذیر است یعنی با داشتن تابع توزیع متغیر تصادفی X به راحتی می‌توان تابع احتمال، تابع چگالی احتمال و احتمال قرار گرفتن متغیر تصادفی X در هر بازه‌ی دلخواه را به صورت زیر به دست آورد:

الف) اگر X گسسته باشد:

a.

تابع احتمال: $P_X(x) = P(X=x) = F_X(x) - F_X(x^-)$

$P(a<X\leq b) = P(X\leq b) - P(X\leq a) = F_X(b) - F_X(a)$

$P(a\leq X< b) = P(X< b) - P(X< a) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$

$P(a\leq X\leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$

$P(a< X< b) = F_X(b^-) - F_X(a)$

ب) اگر X پیوسته باشد:

تابع چگالی احتمال: $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$

$P(a \overset{\leq}{<} x \overset{\leq}{<} b) = F_X(b) - F_X(a)$

مثال: آیا تابع زیر یک تابع توزیع است؟ خیر

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 , & x<-1 \\ 1-x^2 , & -1\leq x<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}+x^2 , & \frac{1}{2}\leq x<1 \\ 1 , & 1\leq x \end{cases}$$

زیرا اولاً در بازه $(\frac{1}{2}, 0)$ نزولی است و ثانیاً در بازه $(\sqrt{\frac{1}{2}}, 1)$ مقادیر بزرگتر از یک را اختیار می‌کند

$\frac{1}{2}+x^2>1 \longrightarrow x^2>\frac{1}{2}$

مثال: اگر تابع توزیع متغیرهای تصادفی X به شکل زیر باشد، احتمال‌های $P(X=1)$، $P(X=2)$، $P(2<X\leq 3)$ و $P(1\leq x<3)$ و $P(X>1)$ را حساب کنید.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 , & x<1 \\ \frac{x-1}{2} , & 1\leq x<3 \\ 1 , & x\geq 3 \end{cases}$$

$F(1^-) = F(1)$

$F(3^-) = F(3)$

تابع توزیع یک تابع پیوسته از راست است، پس X پیوسته است.

$P(X=1)=0 \qquad P(X=2)=0$

$P(2<x\leq 3) = F_X(3) - F_X(2) = 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$P(1\leq X<3) = F_X(3) - F_X(1) = 1-0=1$

$P(X>1) = 1-P(X\leq 1) = 1-F_X(1) = 1-0=1$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} , & 1<x<3 \\ 0 , & \text{o.w.} \end{cases}$$

Subject
Date

مثال: تابع توزیع متغیر تصادفی X به صورت زیر است. اولاً احتمال های زیر را به دست آورید و ثانیاً تابع چگالی احتمال آن را محاسبه کنید.

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & , x<0\\ x^2+\frac{1}{5} & , 0\leq x<\frac{1}{2}\\ x & , \frac{1}{2}\leq x<1\\ 1 & , x\geq 1\end{cases}$$

تابع پیوسته است

$P(X=0)=F_X(0)-F_X(0^-)=\frac{1}{5}$

$P(X=2)=F_X(2)-F_X(2^-)=0$

$P(\frac{1}{2}<X\leq\frac{2}{3})=F_X(\frac{2}{3})-F_X(\frac{1}{2})=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$$f_X(x)=\begin{cases}2x & , 0<x<\frac{1}{2}\\ 1 & , \frac{1}{2}<x<1\\ \frac{1}{5} & , x=0\\ \frac{1}{20} & , x=\frac{1}{2}\\ 0 & , o.w\end{cases}$$

$P(X=\frac{1}{2})=F_X(\frac{1}{2})-F_X(\frac{1}{2}^-)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$

متغیر تصادفی فوق یک متغیر تصادفی نه پیوسته و نه گسسته می باشد. این نوع متغیرهای تصادفی متغیر تصادفی آمیخته (ترکیب گسسته و پیوسته) نامیده می شود و برای چنین متغیرهای تصادفی در نقاط گسسته از قوانین مربوط به متغیرهای تصادفی گسسته و در نقاط پیوسته از قوانین مربوط به متغیرهای تصادفی پیوسته استفاده می کنیم.

$P(\frac{1}{2}<X\leq\frac{2}{3})=F_X(\frac{2}{3})-F_X(\frac{1}{2})=\frac{2}{3}-(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})$

$P(\frac{1}{2}\leq X<\frac{2}{3})=F_X(\frac{2}{3}^-)-F_X(\frac{1}{2}^-)=\frac{2}{3}-(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})$

$P(\frac{1}{4}\leq X\leq\frac{3}{4})=F_X(\frac{3}{4})-F_X(\frac{1}{4}^-)=F_X(\frac{3}{4})-F(\frac{1}{4})=\frac{3}{4}-(\frac{1}{16}+\frac{1}{5})=$

$=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}2x\,dx+P_X(\frac{1}{2})+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}1\,dx$

توابعی از یک متغیر تصادفی:

فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد و $U:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع باشد بطوری که داشته باشیم $y=U(x)$، بدیهی است که چون X یک متغیر تصادفی است بنابراین y نیز یک متغیر تصادفی

خواهد بود و دارای تابع توزیع و تابع احتمال یا تابع چگالی احتمال خواهد بود که می توانیم آنها را با توجه به تابع توزیع یا چگالی متغیر تصادفی X مشخص کنیم.

تابع توزیع توابعی از یک متغیر تصادفی: فرض کنید که تابع توزیع متغیر تصادفی X معلوم باشد. با توجه به تابع توزیع X می خواهیم تابع توزیع $y = u(x)$ را بدست آوریم. اگر تابع توزیع x و y را به ترتیب با $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ نشان دهیم آنگاه می توان تابع توزیع متغیر y را با شرط معکوس پذیر بودن تابع u بصورت زیر محاسبه نمود.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(u(X) \leq y) = P(X \leq u^{-1}(y)) = F_X(u^{-1}(y))$$

تذکر: اگر بین X و Y تناظر یک به یک برقرار نباشد (u معکوس پذیر نباشد) در این صورت باید دامنه متغیر تصادفی Y را به مجموعه‌های جدا افراز کنیم بطوری که تابع u روی آنها معکوس پذیر باشد و تابع توزیع متغیر تصادفی Y را روی هر مجموعه به تفکیک با استفاده از رابطه‌ی بالا بدست آورد.

مثال: تابع چگالی متغیر تصادفی X بصورت زیر است. تابع توزیع و تابع چگالی $Y = -2\ln X$ را بدست آورید.

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & , \ 0 < x < 1 \\ 0 & , \ ow \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x = 1 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \quad X \geq x$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-2\ln X \leq y) = P(\ln X \geq \frac{-y}{2}) = P(X \geq e^{-\frac{y}{2}}) = \int_{e^{-\frac{y}{2}}}^{1} 1 \, dx$$

$\ln 1 = 0$

?

$$Y = -2\ln X \longrightarrow Y \in (0, +\infty)$$
$$e^{-\frac{y}{2}} > 1 \longrightarrow -\frac{y}{2} > 0 \longrightarrow y < 0$$
$$e^{-\frac{y}{2}} < 0 \longrightarrow \frac{-y}{2} < \infty \longrightarrow y > -\infty$$

$$= \begin{cases} 0 & , \ e^{-\frac{y}{2}} > 1 \\ \int_{e^{-\frac{y}{2}}}^{1} dx & , \ 0 < e^{-\frac{y}{2}} < 1 \\ 1 & , \ e^{-\frac{y}{2}} \leq 0 \end{cases}$$

$\ln 0 = \infty$

Subject

Date

$$= \begin{cases} 0 & , y<0 \\ 1-e^{-\frac{y}{4}} & , 0<y<\infty \\ 1 & , y=\infty \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} -\frac{1}{4}e^{-\frac{y}{4}} & , 0<y<\infty \\ 0 & , ow \end{cases}$$

مثال: متغیر تصادفی پیوسته X با تابع توزیع $F_X(x)$ را در نظر بگیرید. تابع توزیع $Y=aX+b$ را برحسب تابع توزیع X به دست آورید.

$$F_Y(y) = P(Y\le y) = P(aX+b\le y) = P\left(X\le \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$ اگر $a>0$

$$P\left(X\ge \frac{y-b}{a}\right) = 1-P\left(X< \frac{y-b}{a}\right) = 1-F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$ اگر $a<0$ باشد

مثال: تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است. تابع توزیع و تابع چگالی متغیر تصادفی $Y=X^2$ را به دست آورید.

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , -1<x<1 \\ 0 & , ow \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(Y\le y) = P(X^2\le y) = P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$$

$$= \begin{cases} 0 & , y<0 \\ \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}\,dx = \sqrt{y} & , 0\le y<1 \\ 1 & , y\ge 1 \end{cases} \Longrightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & , 0<y<1 \\ 0 & , ow \end{cases}$$

مثال: فرض کنید تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد، تابع احتمال $Y=X^3$ را به دست آورید.

$$f_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & , x=1,2,\dots \\ 0 & , ow \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(Y\le y) = P(X^3\le y) = P(X\le\sqrt[3]{y}) = \sum_{x=1}^{\sqrt[3]{y}} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{\text{جمله آخر} - \text{جمله اول}}{1-\text{قدر نسبت}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt[3]{y}+1}}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt[3]{y}}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y < 1 \\ 1 - (\tfrac{1}{2})^{\sqrt[3]{y}} & , y = 1, 8, 27, \ldots \\ 1 & , y = +\infty \end{cases}$$

$$P_Y(y) = F_Y(y) - F_Y(y^-)$$

$$P_Y(y) = P(Y = y) = P(X^3 = y) =$$

$$P(X = \sqrt[3]{y}) = \begin{cases} (\tfrac{1}{2})^{\sqrt[3]{y}} & , y = 1, 8, 27, \ldots \\ 0 & , \text{ow} \end{cases}$$

✓ بررسی پارامترهای جامعه: همان طور که در آمار توصیفی دیدیم براساس یک نمونه n تایی از یک جامعه پارامترهای جامعه مانند میانگین، واریانس، انحراف از معیار، میانه، صدک ها و... را برآورد می نماییم ولی این مقدار صرفاً یک برآورد برای پارامترهای جامعه بودن و ممکن بود با مقدار واقعی تفاوت داشته باشد، هرچه مقدار حجم نمونه بیشتر می‌شد این برآوردها به مقدار واقعی پارامترها نزدیک تر می شود. اما با داشتن توزیع جامعه (تابع توزیع یا تابع چگالی) نیاز به برآورد پارامترهای فوق نداشته و می توان مقدار دقیق این پارامترها را استخراج نمود که در زیر به بررسی آنها می پردازیم:

۱) میانگین جامعه (μ): مرکز ثقل متغیر تصادفی X را میانگین آن گفته و به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$E(X) = \mu_X = \begin{cases} \sum_x x\, p_X(x) & X \text{ گسسته} \\ \int x\, f_X(x)\, dx & X \text{ پیوسته} \end{cases}$$

امید ریاضی متغیر تصادفی X

مثال: در هر یک از حالت های زیر امید ریاضی متغیر تصادفی X را به دست آورید.

①

X	-۱	۰	۱	۲	۳	جمع
$P_X(x)$	۰/۲	۰/۳	۰/۲	۰/۱	۰/۲	۱

$$E(X) = \sum_x x\, p_X(x) = (-1)(0/2) + (0)(0/3) + (1)(0/2) + (2)(0/1) + (3)(0/2) = 0/8$$

Subject

Date

$$\frac{1}{4} = 14$$

۴) $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0, \lambda>0 \\ 0, & ow \end{cases}$ $\quad E(x) = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx =$

$\rightarrow x = u \rightarrow du = dx \rightarrow \lambda e^{-\lambda x} dx = dv \rightarrow v = -e^{-\lambda x}$

$$= -xe^{-\lambda x} + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

۳) $f_X(x) = (1-q) q^x \quad , \quad x = 1,2,3,\ldots \quad , \quad 0<q<1$

$$\sum_{x=0}^{\infty} x(1-q)q^x = (1-q) q \sum_0^\infty x q^{x-1} = (1-q) q \sum_0^\infty \frac{d}{dq} q^x = (1-q) q \frac{d}{dq}$$

$$\left(\sum_{x=0}^{\infty} q^x\right) = q(q-1) \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{1-q}\right) = q(q-1) \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{q}{1-q}$$

چند نکته در مورد امید ریاضی:

۱) امید ریاضی هر عدد ثابت برابر خود آن است.

$$E(c) = \int c f_X(x) dx = c \underbrace{\int f_X(x) dx}_{1} = c$$

۲) امید ریاضی یک عملگر خطی است یعنی:

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

اثبات: فرض کنیم متغیر تصادفی X گسسته باشد، می توان نوشت:

$$E(aX+b) = \sum_x (ax+b) P_X(x) = a\sum_x x P_X(x) + b \underbrace{\sum_x P_X(x)}_{1} = aE(x) + b$$

۳) امید ریاضی هر تابع دلخواه از متغیر تصادفی X برابر است با:

$$E(g(x)) = \begin{cases} \sum_x g(x) P_X(x) & \text{گسسته} \\ \int g(x) f_X(x) dx & \text{پیوسته} \end{cases}$$

PAPCO

$\Sigma ax + \Sigma b$

Subject ۲۸
Date

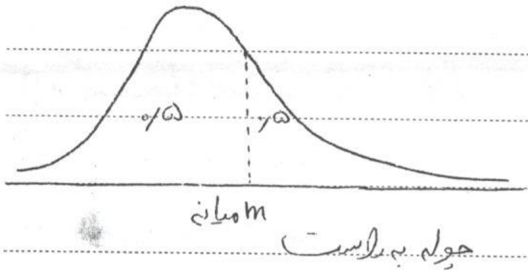
مثال: اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد، امید ریاضی $g(X)=X^2$ را به دست آورید.

X	-۲	-۱	۰	۱	۲	جمع
$P_X(x)$	۰/۲	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۵	۱

$$\sum_{x=-2}^{2} x^2 p_X(x)$$

$$E(g(x)) = \sum g(x) p_X(x) = (4\times 0/2)+(1\times 0/1)+(0\times 0/1)+(1\times 0/1)+(4\times 0/5)$$
$$= \frac{8}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{20}{10}=\frac{30}{10}=3$$

۲) میانه: همانطور که می‌دانیم میانه عددی است که ۵۰ درصد داده‌ها از آن کمتر و بقیه از آن بیشترند.
میانه متغیر تصادفی X عددی است که نصف جرم این متغیر قبل از آن و باقی جرم بعد از آن توزیع می‌شود.



الف) محاسبه‌ی میانه‌ی متغیر تصادفی گسسته:
میانه‌ی متغیر تصادفی گسسته X عددی است که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند. این عدد ممکن است یکتا نباشد.

$$* \; P(X<m) \le \tfrac{1}{2} \le P(X\le m)$$

مثال: مطلوب است محاسبه میانه در مثال قبل:

$P(X<-2)=0$

$P(X\le -2)=P(X<-1)=0/2$ — عدد ۱ در نامساوی * صدق می‌کند

$P(X\le -1)=P(X<0)=0/3$ — کلیه اعداد متعلق به بازه‌ی [۱،۲] در نامساوی (*) صدق می‌کنند

$P(X\le 0)=P(X<1)=0/4$ — پس میانه منحصر به فرد نبوده و برابر است با:

$P(X\le 1)=P(X<2)=0/5$ $\quad m=[1,2]$

$P(X\le 2)=1$

Subject
Date

ب) محاسبه‌ی میانه در متغیر تصادفی پیوسته:

میانه متغیر تصادفی پیوسته X طبق تعریف از دل معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

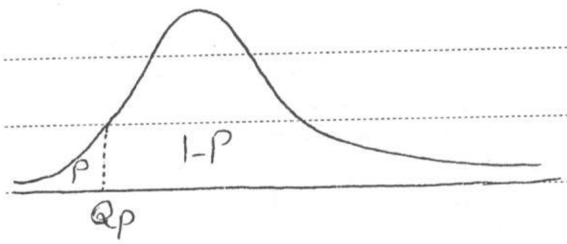
$$\int_{-\infty}^{m} f_X(x)\,dx = \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad F_X(m) = \frac{1}{2}$$

مثال: متغیر تصادفی X تابع چگالی زیر می‌باشد. میانه‌ی آن را محاسبه کنید.

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0<x<1 \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{m} 4x^3\,dx = \frac{1}{2} \qquad \int_{0}^{m} 4x^3\,dx = x^4\Big|_0^m \Rightarrow m^4 = \frac{1}{2} \longrightarrow m = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \longrightarrow m = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \quad \text{ق ق}$$

۳) چندک‌ها: چندک مرتبه‌ی p ام متغیر تصادفی X عددی است که جرم متعلق به $(-\infty, Q_p]$ برابر p می‌شود.



الف) محاسبه‌ی Q_p در متغیرهای تصادفی گسسته:

برای متغیر تصادفی گسسته X، Q_p عددی است که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند.

$$P(X<Q_p) \leq p \leq P(X\leq Q_p)$$

مثال: در مثال گسسته قبل مطلوبست محاسبه‌ی چارک سوم، دهک اول و دهک سوم.

$Q_3 \longrightarrow p = \frac{3}{4} \qquad P(X<Q_3) \leq \frac{3}{4} \leq P(X\leq Q_3) \qquad Q_3 = 2$

$D_3 \longrightarrow p = \frac{3}{10} \qquad P(X<D_3) \leq \frac{3}{10} \leq P(X\leq D_3) \qquad D_3 = [-1, 0]$

$D_1 \longrightarrow p = \frac{1}{10} \qquad P(X<D_1) \leq \frac{1}{10} \leq P(X\leq D_1) \qquad D_1 = -2$

ب) محاسبه‌ی Q_p در متغیرهای تصادفی پیوسته:

برای متغیرهای تصادفی پیوسته X طبق تعریف، Q_p عددی است که در معادله‌ی زیر صدق

نموده و متعلق به دامنه‌ی متغیر مربوطه نیز باشد:

$$\int_{-\infty}^{Q_p} f_X(x)\,dx = P \quad \text{یا} \quad F_X(Q_p) = P$$

مثال: مطلوب است محاسبه در مثال پیوسته قبل (چارک اول و دهک نهم):

$$f_X(x) = 4x^3 \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ x^4 & , \ 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \ x \geq 1 \end{cases}$$

$$Q_1 \longrightarrow P = \frac{1}{4}$$

$$F_X(Q_1) = \frac{1}{4} \longrightarrow Q_1^4 = \frac{1}{4} \longrightarrow Q_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{4}}$$

$$F_X(D_9) = 0/9 \longrightarrow D_9^4 = 0/9 \longrightarrow D_9 = \sqrt[4]{0/9}$$

۴) نما: نما در متغیرهای تصادفی عددی است که دارای بیشترین جرم باشد و یا به عبارتی دیگر می‌توان گفت:

$$M = \arg_x \sup f_X(x) \quad \text{یا} \quad P_X(x)$$

نکته ⟸ اگر X گسسته باشد، می‌توان نما را از روابط زیر محاسبه نمود:

$$\frac{P_X(M)}{P_X(M^-)} \geq 1 \quad , \quad \frac{P_X(M)}{P_X(M^+)} \geq 1$$

نکته ⟸ در صورت پیوسته بودن X، نما عددی است که در معادلات زیر صدق می‌کند.

$$f'_X(M) = 0 \quad , \quad f''_X(M) < 0$$

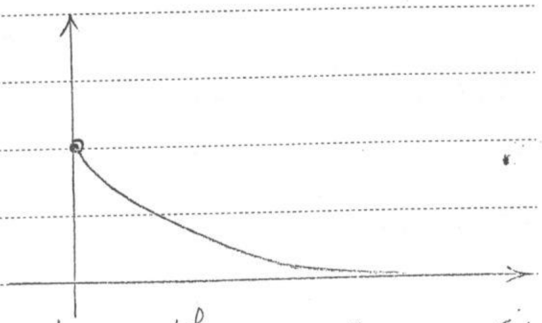
مثال: نما را در توزیع‌های زیر به دست آورید.

$$1)\ P_X(x) = \frac{e^{-2} \cdot 2^x}{x!} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} \dfrac{P_X(M)}{P_X(M-1)} \geq 1 \longrightarrow \dfrac{e^{-2}\times \frac{2^M}{M!}}{e^{-2}\times \frac{2^{M-1}}{(M-1)!}} \geq 1 \longrightarrow \dfrac{2}{M} \geq 1 \longrightarrow M \leq 2 \\ \dfrac{P_X(M)}{P_X(M+1)} \geq 1 \longrightarrow \dfrac{e^{-2}\times \frac{2^M}{M!}}{e^{-2}\times \frac{2^{M+1}}{(M+1)!}} \geq 1 \longrightarrow \dfrac{M+1}{2} \geq 1 \longrightarrow M \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow M = 1 \text{ یا } 2$$

؟ ۲) $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad \lambda > 0 , \; x > 0$

$$\begin{cases} f'_X(M) = 0 \longrightarrow -\lambda^2 e^{-\lambda x} = 0 \longrightarrow \text{به ازای هیچ } \lambda \text{ ها صفر نمی‌شود} \\ f''_X(M) < 0 \longrightarrow \lambda^3 e^{-\lambda x} \end{cases}$$



چون $x=0$، $\sup f_X(x)$ است لذا $M=0$ است

؟ ج ۳) $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , \quad x\in\mathbb{R} , \mu\in\mathbb{R} , \sigma > 0$

$$f'_X(x) = \frac{-(x-\mu)}{\sigma^2\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 0 \longrightarrow x = \mu$$

پس $M=\mu$ است.

$f''_X(x) < 0$

واریانس: واریانس متغیر تصادفی x برابر است با میانگین یا امید ریاضی فاصله‌ی متغیر تصادفی x از مقدار متوسط آن به توان دو و یا به عبارت دیگر:

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

بنابراین چون مقادیر $(x-\mu)^2$، مثبت اند لذا امید ریاضی‌شان یعنی واریانس نیز همواره بزرگتر یا مساوی صفر است.

$$= \begin{cases} \sum_x (x-\mu)^2 P_X(x) & \text{گسسته} \\ \int (x-\mu)^2 f_X(x)\,dx & \text{پیوسته} \end{cases}$$

می‌توان واریانس را نیز از فرمول زیر محاسبه نمود:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2$$

اثبات:

$$Var(x) = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2)$$
$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$$
$$= E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2 \Longrightarrow E(X^2) - \mu^2$$

مثال: واریانس متغیرهای تصادفی X را حساب کنید.

1)

X	-2	-1	0	1	2	جمع
$P_X(x)$	$0/2$	$0/1$	$0/1$	$0/1$	$0/5$	1

$E(X) = 0/8 = \mu$

$E(X^2) = 3$

$$\Longrightarrow Var(x) = E(X^2) - \mu^2 = 3 - (0/8)^2 = 3 - 0/64 = 2/36$$

2)
$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0<x<1 \\ 0, & ow \end{cases}$$

$$\mu = E(X) = \int_0^1 x f(x)\,dx = \int_0^1 3x^3\,dx = \frac{3}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 3x^4\,dx = \frac{3}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{3}{5}$$

$$Var(x) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}$$

۳) $P_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} , & x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 , & o.w. \end{cases}$ $\qquad \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = 1 \longrightarrow \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda}$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

$\underline{E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)} \Rightarrow E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$

$$E(X(X-1)) = \sum_{0}^{\infty} x(x-1) \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \sum_{2}^{\infty} x(x-1) \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda} = \lambda^2$$

$$E(X^2) = \lambda^2 + \lambda \Rightarrow Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

تابع چگالی احتمال یا تابع احتمال توابعی از متغیرهای تصادفی:

الف) متغیرهای تصادفی گسسته: فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $P_X(x)$ باشد. همچنین فرض کنید $Y = U(X)$ یک تبدیل یک به یک بین مقادیر X و Y باشد. با توجه به یک به یک بودن U، تابعی مانند W وجود دارد به طوری که $X = W(Y) \Rightarrow [W = U^{-1}]$ بنابراین تابع احتمال متغیر تصادفی Y از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$P_Y(y) = P_X[W(y)]$$

$\sum_{0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} =$

$\sum_{x=1}^{\infty} (x-1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x-1}}{(x-1)!}$

$\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^x}{x!}$ $\qquad \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x \times \lambda^{-1}}{(x!)}$

مثال: تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است. مطلوب است محاسبه‌ی تابع احتمال متغیر تصادفی $Y=X^2$.

$$P_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} & , \quad x=1,2,\dots \\ 0 & , \quad OW\end{cases}$$

$$Y=X^2 \xrightarrow{x>0} X=\sqrt{Y} \qquad P_Y(y)=P_X(\sqrt{y})=\begin{cases}\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{y}-1} & , \quad y=1,4,\dots \\ 0 & , \quad OW\end{cases}$$

ب) متغیرهای تصادفی پیوسته: فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ و $Y=u(X)$ یک تابع یک به یک از X باشد. چون با توجه به یک به یک بودن u می‌توان نوشت $X=w(Y)$، که w نیز یک تابع یک به یک و معکوس u است، با استفاده از رابطه‌ی زیر می‌توان به طور مستقیم تابع چگالی Y را حساب کرد:

$$f_Y(y)=f_X[w(y)]\,|J| \quad , \quad J=\frac{d}{dy}w(y)$$

مثال: اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد، مطلوب است محاسبه‌ی تابع چگالی احتمال $Y=X^3$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & , \quad -1<x<1 \\ 0 & , \quad OW\end{cases}$$

$$y=x^3 \longrightarrow x=y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

$$f_Y(y)=f_X(\sqrt[3]{y})\,|J|=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}\right|=\begin{cases}\frac{1}{6\sqrt[3]{y^2}} & , \quad -1<y<1 \\ 0 & , \quad OW\end{cases}$$

فرض کنید یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ یا تابع احتمال $P_X(x)$ و $y=w(x)$ یک تبدیل یک به یک بین مقادیر x و y نباشد در این صورت اگر بتوانیم بازه‌ای را که در آن x تغییر می‌کند به k محدوده ۲ به ۲ ناسازگار افراز کنیم که بین هر یک از توابع معکوس $X_1=w_1(y)$ و $X_2=w_2(y)$ و ... متناظر یک به یک برقرار باشد، آنگاه:

۱) تابع احتمال y در صورتی که x گسسته باشد برابر است با:

$$P_Y(y)=\sum_{i=1}^{k} P_k(w_i(y))$$

۲) تابع چگالی احتمال y در صورتی که y پیوسته باشد برابر است با:

$$P_Y(y)=\sum_{i=1}^{k} f_k(w_i(y_i))\,|J_i|$$

$$J_i=\frac{d}{dw}w_i(y)$$

مثال: در هر یک از اعداد زیر تابع احتمال، تابع چگالی احتمال $y=x^2$ را به دست آورید.

X	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	جمع
$P_X(x)$	۰/۱	۰/۲	۰/۱	۰/۳	۰/۲	۰/۱	1

$P(y=0)=P(x=0)=0/1$

$P(y=1)=P(x^2=1)=P(x=\pm1)=0/2+0/3=0/5$

$P(y=4)=P(x=\pm2)=0/3$

$P(y=9)=P(x=\pm3)=0/1$

y	۰	۱	۴	۹	جمع
$P_Y(y)$	۰/۱	۰/۵	۰/۳	۰/۱	1

۲) $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<x<1\\ 0, & o.w\end{cases}$

$-1<x<0 \longrightarrow y=x^2 \longrightarrow \underbrace{x=-\sqrt{y}}_{w_1(y)} \longrightarrow J_1=\frac{-1}{2\sqrt{y}}$

$0<x<1 \longrightarrow y=x^2 \longrightarrow \underbrace{x=+\sqrt{y}}_{w_2(y)} \longrightarrow J_2=\frac{1}{2\sqrt{y}}$

$$f_Y(y)=f_X(w_1(y))|J_1|+f_X(w_2(y))|J_2|=\begin{cases}\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sqrt{y}} & 0<y<1\\ 0, & o.w\end{cases}$$

$$۳)\ f_X(x) = \begin{cases} 1/6 , & -4 < x < 2 \\ 0 , & o.w \end{cases}$$

$-4 < x < -2 \longrightarrow y = x^2 \longrightarrow x = -\sqrt{y} \longrightarrow J = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$

$$\begin{cases} -2 < x < 0 \longrightarrow x = -\sqrt{y} \longrightarrow J_1 = \frac{-1}{2\sqrt{y}} \\ 0 < x < 2 \longrightarrow x = \sqrt{y} \longrightarrow J_2 = \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(-\sqrt{y})|J_1| + f_X(+\sqrt{y})|J_2| = \frac{1}{6}\times\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{6\sqrt{y}} , & 0 < y < 4 \\ f_X(-\sqrt{y})|J| = \frac{1}{6}\times\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{12\sqrt{y}} & 4 < y < 16 \\ 0 , o.w \end{cases}$$

✓ متغیرهای تصادفی دو بعدی :

تابع چگالی احتمال یا تابع احتمال : این تابع f می توان برای دو متغیر x و y در صفحه xoy به صورت زیر تقسیم داد :

الف) تابع احتمال دو متغیر تصادفی x و y (گسسته) :

اگر x و y دو متغیر تصادفی گسسته باشند تابع احتمال آنها به صورت مقابل تعریف می شود $P_{X,Y}(x,y) = P(X=x , Y=y)$ که دارای خواص زیر است :

1) $P_{X,Y}(x,y) \geq 0$

2) $\sum_x \sum_y P_{X,Y}(x,y) = 1$

ب) تابع چگالی احتمال دو متغیر تصادفی x و y (پیوسته) :

اگر x و y دو متغیر تصادفی پیوسته و $f_{X,Y}(x,y)$ تابعی از x و y باشد به طوری که

1) $\forall x,y : f_{X,Y}(x,y) \geq 0$

2) $\iint f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

Subject
Date

آنگاه $f_{x,y}(x,y)$ را تابع چگالی احتمال دو متغیر تصادفی x,y گوییم.

مثال: تابع احتمال توأم دو متغیر تصادفی x و y به صورت زیر است:

$$P_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} C(x+y) & , \quad x=1,2,3 \quad y=1,2 \\ 0 & , \quad o.w \end{cases}$$

مطلوبست اولاً تعیین مقدار C و ثانیاً محاسبه‌ی احتمال های $x=3$ و $y=3$.

$$C\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{2}(x+y)=1 \longrightarrow C\left[(1+1)+(1+2)+(2+1)+(2+2)+(3+1)+(3+2)\right]=1 \longrightarrow C=1/21$$

$$P(X=3)=P(X=3,\ Y=1)+P(X=3,\ Y=2)=\frac{4}{21}+\frac{5}{21}=\frac{9}{21}$$

$$P(Y=2)=P(X=1,\ Y=2)+P(X=2,\ Y=2)+P(X=3,\ Y=2)=\frac{3}{21}+\frac{4}{21}+\frac{5}{21}=\frac{12}{21}$$

نکته: درصورتی که توابع احتمال یا چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی x و y را داشته باشیم می‌توانیم توابع احتمال و یا چگالی احتمال حاشیه‌ای هر کدام از متغیرها را به صورت زیر به دست آورد.

الف) x و y گسسته باشند:

$$P_X(x)=\sum_{y}P_{X,Y}(x,y)$$

$$P_Y(y)=\sum_{x}P_{X,Y}(x,y)$$

ب) x و y پیوسته باشند:

$$f_X(x)=\int f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y)=\int f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

مثال: در مثال گذشته توابع احتمال حاشیه‌ای x و y را به دست آورید.

$$P_X(x)=\sum_{y=1}^{2}P_{X,Y}(x,y)=\frac{x+1}{21}+\frac{x+2}{21}=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{21} & , \quad x=1,2,3 \\ 0 & , \quad o.w\end{cases}$$

$$P_Y(y) = \sum_{x=1}^{3} P_{X,Y}(x,y) = \frac{1+y}{21} + \frac{2+y}{21} + \frac{3+y}{21} = \begin{cases} \frac{3y+6}{21}, & y=1,2 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

مثال: اگر x و y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند، اولاً مقدار ثابت k را بیابید ثانیاً توابع چگالی حاشیه‌ای x و y را به دست آورید، ثالثاً احتمال $x<y$ را بیابید

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k(x^2+2xy) & 0<x<1 \ , \ 0<y<1 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

$$\int_0^1\int_0^1 k(x^2+2xy)\,dx\,dy \rightarrow \int_0^1 k(x^2y+xy^2)\Big|_0^1 dx \Rightarrow \int_0^1 k(x^2+x)\,dx$$

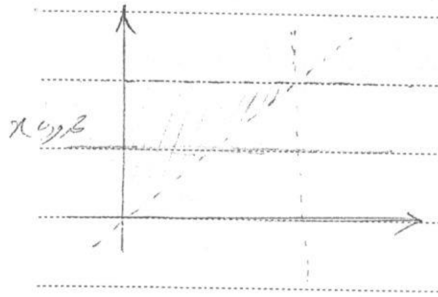
$$\rightarrow k\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 \rightarrow k\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right]=1 \Rightarrow k=\frac{6}{5}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{6}{5}(x^2+2xy)\,dx = \frac{6}{5}\left(\frac{x^3}{3}+x^2y\right)\Big|_0^1 = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{3}+y\right) = \begin{cases} \frac{6}{15}+\frac{6}{5}y, & 0<y<1 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{6}{5}(x^2+2xy)\,dy = \frac{6}{5}(x^2y+xy^2)\Big|_0^1 = \begin{cases} \frac{6}{5}(x^2+y), & 0<x<1 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

$$\int_0^1\int_0^y \frac{6}{5}(x^2+2xy)\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{6}{5}\left[\frac{x^3}{3}+x^2y\right]_0^y dy = \int_0^1 \frac{6}{5}\left[\frac{y^3}{3}+y^3\right]dy$$

$$= \frac{6}{5}\left[\frac{y^4}{12}+\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{6}{5}\left[\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right] = \frac{6}{5}\left[\frac{4}{12}\right] = \frac{2}{5}$$



تابع توزیع توأم دو متغیر تصادفی x و y :

تابع f را که به هر نقطه‌ای x و y از $\mathbb{R}^2$ احتمال باهم رخ دادن دو پیشامد $\{X\le x\}$ و $\{Y\le y\}$ را به دست می‌دهد. تابع توزیع توأم دو متغیر تصادفی x و y گوییم که به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$F_{X,Y}(x,y)=P(X\le x,\ Y\le y)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{t_2\le y}\sum_{t_1\le x} P_{X,Y}(t_1,t_2) & \text{گسسته}\\[2ex] \displaystyle\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2 & \text{پیوسته}\end{cases}$$

خواص تابع توزیع دو متغیره :

۱) $0\le F_{X,Y}(x,y)\le 1 \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}$

۲) این تابع یک تابع غیر نزولی است، زیرا:

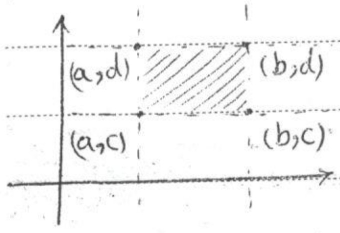
$$\forall x_1\le x_2 : F_{X,Y}(x_1,y)\le F_{X,Y}(x_2,y)$$

$$\forall y_1\le y_2 : F_{X,Y}(x,y_1)\le F_{X,Y}(x,y_2)$$

۳) $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0 \ ,\quad F(\infty,\infty)=1$

۴) احتمال وقوع توأم دو پیشامد $\{a<x\le b\}$, $\{c<y\le d\}$ برابر است با:

$$P(a<x\le b\ ,\ c<y\le d)=F_{X,Y}(b,d)-F_{X,Y}(a,d)-F_{X,Y}(b,c)+F_{X,Y}(a,c)$$



تذکر: اگر دو متغیر x و y پیوسته باشند، داشتن تابع توزیع دو متغیره‌ی آنها می‌توان تابع چگالی احتمال توأم آنها را از رابطه‌ی زیر محاسبه کرد.

$$F_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}$$

* در حالت کلی (گسسته یا پیوسته) با داشتن تابع توزیع دو متغیره‌ی (x,y) می‌توان توابع توزیع حاشیه‌ای آنها را با استفاده از روابط زیر به دست آورد

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x,+\infty)$$
$$F_Y(y) = F_{X,Y}(+\infty,y)$$

مثال: اگر x و y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند تابع توأم و حاشیه‌ای x و y را محاسبه کنید

$x<0$ یا $y<0 \longrightarrow F_{X,Y}(x,y) = 0$

$$0 \le x < 1 \;,\; 0 \le y < 1 \longrightarrow F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} \tfrac{6}{5}(t_1^2 + 2t_1t_2)\,dt_1\,dt_2$$

$$= \int_{-\infty}^{y} \tfrac{6}{5}\left(\tfrac{1}{3}t_1^3 + t_1^2 t_2 \Big|_0^x\right) dt_2 = \int_0^y \tfrac{6}{5}\left(\tfrac{1}{3}x^3 + x^2 t_2\right) dt_2$$

$$= \tfrac{6}{5}\left(\tfrac{1}{3}x^3 y + \tfrac{1}{2}x^2 y^2\right) = \tfrac{2}{5}x^3 y + \tfrac{3}{5}x^2 y^2$$

$$0 \le x < 1 \;,\; y \ge 1 \longrightarrow F_{X,Y}(x,y) = \int_0^1\int_0^x \tfrac{6}{5}(t_1^2 + 2t_1t_2)\,dt_1\,t_2 = \tfrac{2}{5}x^3 + \tfrac{3}{5}x^2$$

$x \ge 1 \;,\; y \ge 1 \longrightarrow F_{X,Y}(x,y) = 1$ تمام برد را می‌گیرد

(ادامه صفحه بعد)

Subject

Date

$$F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 0 & , \; x<0 \text{ یا } y<0 \\ \frac{2}{5}x^3y+\frac{3}{5}x^2y^2 & , \; 0\leq x<1 \; , \; \cancel{y\geq 1} \;\; 0\leq y<1 \\ \frac{2}{5}x^3+\frac{3}{5}x^2 & , \; x\geq 1 \; , \; 0\leq y<1 \\ \frac{2}{5}y+\frac{3}{5}y^2 & , \; x\geq 1 \; , \; 0\leq y<1 \\ 1 & , \; x\geq 1 \; , \; y\geq 1 \end{cases}$$

$$F_X(x)=F_{X,Y}(x,+\infty)=\begin{cases} 0 & , \; x<0 \\ \frac{2}{5}x^3+\frac{3}{5}x^2 & , \; 0\leq x<1 \\ 1 & , \; x\geq 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y)=F_{X,Y}(+\infty,y)=\begin{cases} 0 & , \; y<0 \\ \frac{2}{5}y+\frac{3}{5}y^2 & , \; 0\leq y<1 \\ 1 & , \; y\geq 1 \end{cases}$$

تابع چگالی احتمال (تابع احتمال شرطی): تابع چگالی احتمال شرطی $x|Y=y$, $y|X=x$ که به ترتیب توابعی از x و y می‌باشند طبق تعریف احتمال شرطی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(x|Y=y)=\frac{P(X=x\;,\;Y=y)}{P(Y=y)}=\begin{cases} \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)} & , \; P_Y(y)\neq 0 \\ 0 & , \; P_Y(y)=0 \end{cases}$$

گسسته

$$f(x|Y=y)=\begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} & , \; f_Y(y)\neq 0 \\ 0 & , \; f_Y(y)=0 \end{cases}$$

پیوسته

P4PCO

$$P(y|X=x)=\begin{cases}\dfrac{P_{X,Y}(x,y)}{P_X(x)} , & P_X(x)\neq 0\\ 0 , & P_X(x)=0\end{cases}$$

$$f(y|X=x)=\begin{cases}\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} , & f_X(x)\neq 0\\ 0 , & ow\end{cases}$$

نکته: مانند توابع احتمال و توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای توابع احتمال شرطی و احتمال نیز در شرایط توابع احتمال (چگالی احتمال) صدق می‌کند، یعنی:

گسسته:
1) $\forall x: P(x|y=y)\geqslant 0$
2) $\sum_x P(x|y=y)=1$

پیوسته:
1) $\forall x: f(x|y=y)\geqslant 0$
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x|y=y)\,dx=1$

مثال: جدول توزیع توأم متغیر تصادفی x و y جداول توزیع های شرطی $y|X=x$ ، $x|y=y$ را به دست آورید.

$x \backslash y$	۰	۱	$P_X(x)$
۰	۱/۱۰	۱/۱۰	۲/۱۰
۱	۲/۱۰	۳/۱۰	۵/۱۰
۲	۱/۱۰	۲/۱۰	۳/۱۰
	۴/۱۰	۶/۱۰	۱

X	۰	۱	۲	
$P(x\|y=0)$	۱/۴	۱/۲	۱/۴	۱
$P(x\|y=1)$	۱/۶	۱/۲	۱/۳	۱

$P(x=0|y=0)=\dfrac{P_{X,Y}(0,0)}{P_Y(0)}=\dfrac{1/10}{4/10}=1/4$ $\qquad P(x=0|y=1)=1/6$

Subject
Date

$p(x=1 \mid y=0) = \dfrac{P_{X,Y}(1,0)}{P_Y(0)} = \dfrac{۲/۱۰}{۴/۱۰} = ۱/۲$ $\quad p(x=1 \mid y=1) = ۱/۲$

$p(x=۲ \mid y=0) = \dfrac{P_{X,Y}(۲,0)}{P_Y(0)} = \dfrac{۱/۱۰}{۴/۱۰} = ۱/۴$ $\quad p(x=۲ \mid y=1) = ۲/۶ = ۱/۳$

y	۰	۱	جمع
$P(y \mid x=0)$	۱/۲	۱/۲	۱
$P(y \mid x=1)$	۲/۵	۳/۵	۱
$P(y \mid x=۲)$	۱/۳	۲/۳	۱

$p(y=0 \mid x=0) = \dfrac{P_{X,Y}(0,0)}{P_X(0)} = \dfrac{۱/۱۰}{۲/۱۰} = ۱/۲$

$p(y=1 \mid x=0) = \dfrac{P_{X,Y}(0,1)}{P_X(0)} = ۱/۲$

مثال: اگر x و y دارای تابع چگالی توأم زیر باشد، مطلوبست:

الف) محاسبه‌ی مقدار مجهول K.

ب) محاسبه‌ی توابع چگالی حاشیه‌ای x و y.

ج) محاسبه‌ی توابع چگالی شرطی $\begin{cases} x \mid Y=y \\ y \mid X=x \end{cases}$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} K & , x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & , o.w \end{cases}$$

الف) $\iint f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 = \int_0^{2\pi} \frac{K}{2} r^2 \Big|_0^1 d\theta = K\pi = 1 \longrightarrow K = \frac{1}{\pi}$

ب) $f_X = \displaystyle\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,dy = \frac{1}{\pi} y \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & , -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & , o.w \end{cases}$

$f_Y = \displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi}\,dx = \frac{1}{\pi} x \Big|_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & , -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & , o.w \end{cases}$

ج) $f(x \mid y=y) = \begin{cases} \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{1/\pi}{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} , & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 , & ow \end{cases}$

$f(y \mid X=x) = \begin{cases} \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{1/\pi}{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}} , & -1 \leq y \leq 1 \\ 0 , & ow \end{cases}$

$f(y \mid X=x) \neq f_Y(y)$

$\longrightarrow$ X و Y دو متغیر تصادفی وابسته اند

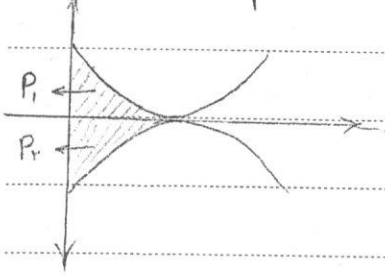
$f(x \mid y=y) \neq f_X(x)$

مثال: اگر x و y دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد مطلوبست:

الف) محاسبه ی توابع چگالی شرطی x و y.

ب) محاسبه ی توابع احتمال شرطی $\begin{cases} X \mid Y=y \\ y \mid X=x \end{cases}$

$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4} , & 0 < x < 1 \quad |y| \leq (x-1)^2 \longrightarrow -(x-1)^2 \leq y \leq (x-1)^2 \\ 0 , & ow \end{cases}$



الف) $f_X(x) = \int \frac{3}{4}\,dy = \int_{-(x-1)^2}^{(x-1)^2} \frac{3}{4}\,dy = \begin{cases} \frac{3}{2}(x-1)^2 , & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 , & ow \end{cases}$

Subject

Date

ج) $f_Y(y) = \begin{cases} \int_{\circ D_1}^{1+\sqrt{-y}} \frac{3}{2}\, dx = \frac{3}{2}(1+\sqrt{-y}) \,, & -1 \leqslant y \leqslant 0 \\ \int_{\circ D_2}^{1+\sqrt{y}} \frac{3}{2}\, dx = \frac{3}{2}(1+\sqrt{y}) \,, & 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{2}(1+\sqrt{|y|}) \,, & -1 < y < 1 \\ 0 \,, & ow \end{cases}$

ب) $f(y \mid X = x) = \begin{cases} \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{\frac{3}{2}}{3(x-1)^2} = \dfrac{1}{2(x-1)^2} \,, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \,, & ow \end{cases}$

$f(x \mid Y = y) = \begin{cases} \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{1}{1+\sqrt{|y|}} \,, & -1 \leqslant y \leqslant 1 \,, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \,, & ow \end{cases}$

۱/ وابستگی و استقلال دو متغیر تصادفی:

دو متغیر تصادفی X و Y مستقل اند، اگر و تنها اگر رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x).f_Y(y)$ ← پیوسته

$P_{X,Y}(x,y)=P_X(x).P_Y(y)$ ← گسسته

در غیر اینصورت دو متغیر وابسته اند. توجه داشته باشید که اگر X و Y مستقل باشند آنگاه تعریف فوق معادل است با:

$f(x|Y=y)=f_X(x)$

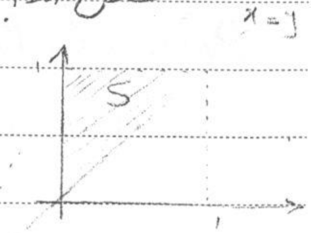
$f(y|X=x)=f_Y(y)$ ← پیوسته

$P(x|Y=y)=P_X(x)$

$P(y|X=x)=P_Y(y)$ ← گسسته

مثال: تابع چگالی احتمال دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر می‌باشد. آیا می‌توان گفت که X و Y مستقل اند؟

$$1)\ f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} c, & 0<x<y<1 \\ 0, & ow \end{cases}$$



$$f_X(x)=\int f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_0^1 c\,dy=\begin{cases} c(1-x), & 0<x<1 \\ 0, & ow \end{cases}$$

دو متغیر وابسته اند

$$f_Y(y)=\int f_{X,Y}(x,y)\,dx=\int_0^y c\,dx=\begin{cases} cy, & 0<y<1 \\ 0, & ow \end{cases}$$

$$2)\quad f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} , & x>0 ,\ y>0 \\ 0 , & o.w \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\, dy = -e^{-(x+y)} \Big|_0^{\infty} = \begin{cases} e^{-x} , & x>0 \\ 0 , & o.w \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\, dx = -e^{-(x+y)} \Big|_0^{\infty} = \begin{cases} e^{-y} , & y>0 \\ 0 , & o.w \end{cases}$$

$\Rightarrow f_X(x) \cdot f_Y(y) = f_{X,Y}(x,y) \longrightarrow$ دو متغیر X و Y مستقل اند

مثال: تابع احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است. مطلوب است:

الف) محاسبه‌ی توابع احتمال حاشیه‌ای X و Y.

ب) تابع احتمال شرطی $Y|X=x$.

ج) آیا این دو متغیر وابسته اند یا خیر؟

$$P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x+3y}{72} , & x=0,1,2 \quad y=1,2,3 \\ 0 , & o.w \end{cases}$$

الف) $P_X(x) = \sum_y P_{X,Y}(x,y) = \sum_{y=1}^{3} \dfrac{2x+3y}{72} = \begin{cases} \dfrac{x+3}{12} & x=0,1,2 \\ 0 , & o.w \end{cases}$

$$P_Y(y) = \sum_x P_{X,Y}(x,y) = \sum_{x=0}^{2} \frac{2x+3y}{72} = \begin{cases} \dfrac{2+3y}{24} , & y=1,2,3 \\ 0 , & o.w \end{cases}$$

ادامه

$$E(x) = \sum x P_x(x) = \sum_{x=1}^{n} x \cdot 1/n = 1/n \sum_{x=1}^{n} x = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{۲} = \frac{n+1}{۲}$$

$$E(x^۲) = \sum_{x} x^۲ P_x(x) = \sum_{x=1}^{n} x^۲ \cdot 1/n = 1/n \sum_{x=1}^{n} x^۲ = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(۲n+1)}{۶} = \frac{(n+1)(۲n+1)}{۶}$$

$$Var(x) = E(x^۲) - E^۲(x) = \frac{(n+1)(۲n+1)}{۶} - \frac{(n+1)^۲}{۴} = \frac{n^۲-1}{۱۲}$$

ب ۲) توزیع برنولی: آزمایش برنولی آزمایشی است که صرفاً دارای دو نتیجه ی ممکن می باشد که یکی را پیروزی و دیگری را شکست می نامند. احتمال پیروزی را با p و احتمال شکست را با $q = 1 - p$ نشان می دهند. متغیر تصادفی برنولی عبارتست از یک متغیر تصادفی گسسته که تکیه گاه آن $\{0, 1\}$ می باشد. عدد صفر برای وقتی است که نتیجه ی آزمایش شکست باشد و عدد یک برای نتیجه ی پیروزی است. متغیر تصادفی X دارای توزیع برنولی است اگر تابع احتمال آن به شکل زیر باشد.

$$P_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} P^{x}(1-P)^{1-x}, & x = 0, 1 \\ 0, & OW \end{cases}$$

امید ریاضی و واریانس این متغیر برابر است با:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{1} x P^{x}(1-P)^{1-x} = 0 + P = P$$

$$E(X^۲) = E(X) = P$$

$$Var(x) = E(x^۲) - E^۲(x) = P - P^۲ = P(1-P)$$

به عنوان مثال در آزمایش پرتاب سکه که احتمال شیر آمدن آن ۱/۲ می باشد چنانچه پیشامد شیر را به عنوان پیروزی در نظر بگیریم در اینصورت تابع احتمال X برابر می شود با:

Subject

Date

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{x} , & x > 0 \\ 0 , & ow \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} y e^{-y} , & y > 0 \\ 0 , & ow \end{cases}$$

$$f(x|y) = f_{x,y}$$

توزیع های مهم آماری:

۱) توزیع های گسسته:

الف) توزیع یکنواخت گسسته: اگر متغیر تصادفی X مقادیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ را با احتمالات مساوی اختیار کند آنگاه گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت گسسته است و تابع احتمال آن به شکل زیر خواهد بود.

$$P_X(x) = P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{n} , & x = x_1, x_2, \dots, x_n \\ 0 , & ow \end{cases}$$

درحالت خاص اگر $x_i = i$ باشد آنگاه تابع احتمال متغیر X به شکل زیر است.

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} , & x = 1, 2, 3, \dots, n \\ 0 , & ow \end{cases}$$

PAPCO

Subject
Date

مثال: در مثال گفته شده در جلسه ی گذشته، ضریب همبستگی x و y را محاسبه کنید.
مثال با حل کامل آن انتهای جزوه نوشتم.

$$M_x(t_1) = \frac{-1}{t_1-1} = \frac{1}{1-t_1}$$

$$M'_x(t_1) = \frac{1}{(1-t_1)^2} \longrightarrow E(x) = M'_x(0) = 1$$

$$\Longrightarrow Var(x) = E(x^2) - E^2(x) = 2 - 1^2 = 1$$

$$M''_x(t_1) = \frac{2}{(1-t_1)^3} \longrightarrow E(x^2) = M''_x(0) = 2$$

$$\rho_{x,y} = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{var(x)\,var(y)}} = \frac{E(xy) - E(x)E(y)}{\sqrt{var(x)\,var(y)}} = \frac{3 - 1(2)}{\sqrt{1 \times 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

یعنی x و y همبستگی (مثبت) مستقیم دارند.

امید ریاضی شرطی دو متغیر تصادفی: $y \mid x = x \ , \ x \mid y = y$

الف) گسسته:

$$E(x \mid y = y) = \sum_x x\, P(x \mid y)$$

$$E(y \mid x = x) = \sum_y y\, P(y \mid x)$$

ب) پیوسته:

$$E(x \mid y = y) = \int x\, f(x \mid y)\, dx = g(y)$$

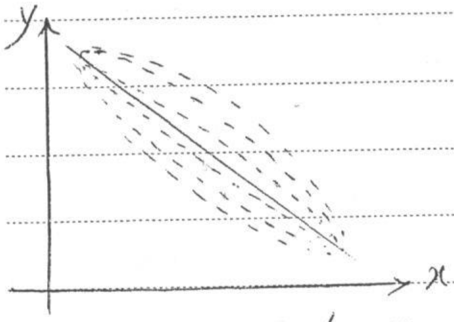
$$E(y \mid x = x) = \int y\, f(y \mid x)\, dy = g(x)$$

مثال: در مثال گذشته امید ریاضی شرطی $x \mid y = y$ و $y \mid x = x$ را به دست آورید.

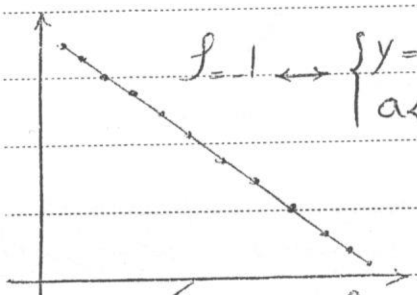
$$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 < x < y \\ 0 & , ow \end{cases}$$

Subject
Date

د) اگر $-1 < \rho < 0$ باشد، بین دو متغیر رابطه‌ی مستقیم و ناقص وجود دارد.



ه) اگر $\rho = -1$ باشد، بین دو متغیر رابطه‌ی غیر مستقیم و کامل وجود دارد.



$$\rho = -1 \longleftrightarrow \begin{cases} y = ax + b \\ a < 0 \end{cases}$$

نکته: اگر x و y مستقل باشند آنگاه می‌توان نتیجه گرفت $\rho_{x,y} = 0$ است اما عکس آن برقرار نیست، یعنی:

$$f_{x,y}(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y) \Rightarrow \rho_{x,y} = 0$$

اثبات: اگر x و y مستقل باشند، آنگاه می‌توان گفت:

$$E(x.y) = E(x)E(y) = \mu_x \, \mu_y$$

$$\Rightarrow cov(x,y) = E(x.y) - \mu_x \mu_y = \mu_x \mu_y - \mu_x \mu_y = 0 \Rightarrow \rho_{x,y} = 0$$

مثال: اگر متغیر تصادفی x دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد و $y = x^2$، آنگاه بدیهی است که x و y مستقل نیستند ولی $\rho_{x,y} = 0$ است، زیرا:

$$f_{X}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 1 \\ 0, & ow \end{cases} \qquad E(x^3) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x^3 \, dx = 0$$

$$E(x) = 0$$

$$cov(x,y) = E(xy) - E(x)E(y) = E(x^3) - E(x)E(x^2) = 0 - 0 = 0 \Longrightarrow \rho_{x,y} = 0$$

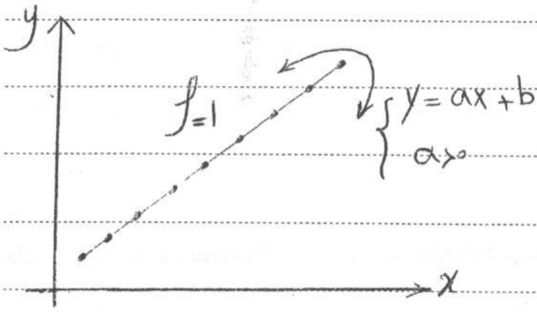
ویژگی های $\rho_{x,y}$:

۱) $\rho_{x,y}$ مقیاس پایاست یعنی به واحد اندازه گیری بستگی ندارد و یا به عبارت دیگر

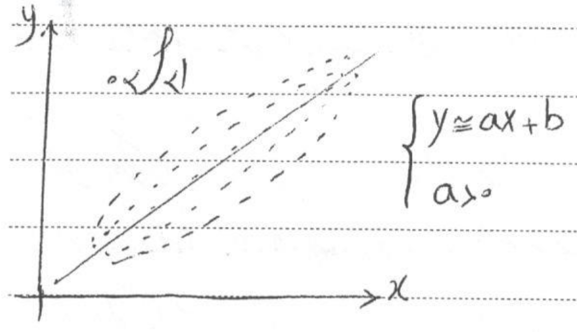
$$\rho_{x,y} = \rho_{ax,ay}$$

۲) همواره $-1 \le \rho_{x,y} \le 1$ است.

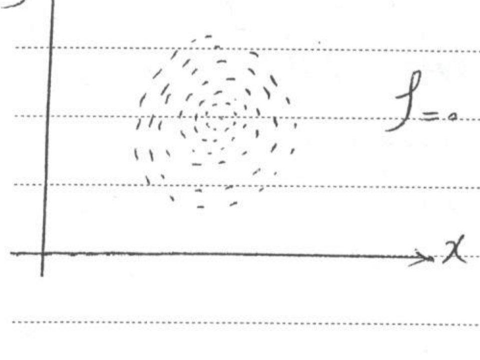
الف) اگر $\rho = 1$ باشد، بین داده ها همبستگی خطی کامل و مستقیم وجود دارد، یعنی اگر نمودار پراکنش داده ها را رسم کنیم، نقاط روی خط راست قرار می گیرند و افزایش x باعث افزایش y می گردد و بالعکس.



ب) اگر $0 < \rho < 1$ باشد، بین داده ها همبستگی مستقیم و ناقص وجود دارد.



ج) اگر $\rho = 0$ باشد، هیچ رابطه خطی بین دو متغیر وجود ندارد.



۹) مثال اگر تابع مولد گشتاور توام دو متغیر تصادفی X و Y به شکل زیر باشد، تابع چگالی احتمال توام آنها را مشخص کنید.

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = \tfrac{1}{8} e^{-t_1+t_2} + \tfrac{1}{8} e^{2t_2} + \tfrac{1}{4} e^{-t_1+2t_2} + \tfrac{1}{2} e^{t_2}$$

$$= \sum_x \sum_y e^{t_1 x + t_2 y} P_{X,Y}(x,y) =$$

$X \backslash Y$	1	2	$P_X(x)$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
$P_Y(y)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	1

ضریب همبستگی خطی بین دو متغیر X و Y:

همان طور که در قسمت استقلال متغیر تصادفی دیدیم، دو متغیر مستقل بودند اگر و تنها اگر رابطه‌ی $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ و در غیر اینصورت می‌گفتیم دو متغیر وابسته اند. حال برای پی بردن به میزان وابستگی این دو متغیر به معیاری نیازمندیم. این معیار ضریب همبستگی خطی بین دو متغیر X و Y نامیده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{covar}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X) \cdot \mathrm{Var}(Y)}} \quad , \quad \begin{cases} \mathrm{cov}(X,Y) = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] \\ \mathrm{Var}(X) = E\left[(X-\mu_X)^2\right] \end{cases}$$

$$\rightarrow \mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu_X^2 \quad , \quad \mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

$$= \int h(y) f_Y(y)\,dy \cdot \int g(x) f_X(x)\,dx = E(h(Y)) \cdot E(g(X))$$

تابع مولد گشتاور توأم دو متغیر تصادفی X و Y:

امید ریاضی $E(e^{t_1X+t_2Y})$ را به ازای $-h_1<t_1<h_1$ و $-h_2<t_2<h_2$ برای مقادیر مثبت h_1 و h_2 در صورت وجود تابع مولد گشتاور توأم X و Y نامیده و با $M_{X,Y}(t_1,t_2)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = \begin{cases} \sum_x \sum_y e^{t_1x_1+t_2y_2} P_{X,Y}(x,y) \\ \iint e^{t_1x+t_2y} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \end{cases}$$

به طور کلی اگر از تابع مولد گشتاور توأم X و Y، k_1 بار نسبت به t_1 و k_2 بار نسبت به t_2 مشتق گرفته و قرار دهیم $t_1=t_2=0$ کمیت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial t_1^{k_1}\,\partial t_2^{k_2}} M_{X,Y}(t_1,t_2)\Big|_{t_1,t_2=0} = E(X^{k_1}Y^{k_2})$$

با داشتن تابع مولد گشتاور توأم X و Y می‌توان به راحتی توابع مولد گشتاورهای حاشیه‌ای X و Y را با استفاده از روابط زیر محاسبه نمود.

$$M_X(t_1) = M_{X,Y}(t_1,0)$$

$$M_Y(t_2) = M_{X,Y}(0,t_2)$$

با استفاده از تابع مولد گشتاورهای توأم دو متغیر تصادفی می‌توان استقلال آنها را بررسی نمود. شرط لازم و کافی برای آن که دو متغیر تصادفی X و Y مستقل باشند آن است که:

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = M_{X,Y}(t_1,0) \cdot M_{X,Y}(0,t_2) = M_X(t_1) \cdot M_Y(t_2)$$

Subject

Date

$$M'_x(t) = \frac{e^t(2-e^t)+e^{2t}}{(2-e^t)^2} = \frac{2e^t}{(2-e^t)^2} \Rightarrow E(X) = M'_x(0) = 2$$

$$M''_x(t) = \frac{2e^t(2-e^t)^2 + 2e^t(2-e^t)2e^t}{(2-e^t)^4} = \frac{2e^t(2-e^t)+4e^{2t}}{(2-e^t)^3} = \frac{4e^t+2e^t}{(2-e^t)^3}$$

$$\Rightarrow E(X^2) = M''_x(0) = \frac{6}{1^3} = 6$$

$$Var(x) = \sigma^2 = 6 - 2^2 = 2$$

امید ریاضی توابع از دو متغیر تصادفی X و Y :

فرض کنید $U(X,Y)$ تابعی از دو متغیر تصادفی X و Y باشد. امید ریاضی این تابع در صورت وجود به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E[U(X,Y)] = \begin{cases} \sum_x \sum_y U(x,y)\, P_{X,Y}(x,y) \\ \iint U(x,y)\, f_X(x,y)\, dx\, dy \end{cases}$$

نکته $\Leftarrow$ اگر X و Y مستقل از هم باشند، آنگاه:

$$E[g(X) \cdot h(Y)] = E[g(X)] \cdot E[h(Y)]$$

برهان: با فرض پیوسته بودن X و Y می‌توان نوشت:

$$E[g(X) \cdot h(Y)] = \iint g(x)\, h(y)\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \iint g(x)\, h(y)\, f_X(x)\, f_Y(y)\, dx\, dy$$

$$\frac{d^k}{dt^k} M_X(t) \Big|_{t=0} = E(X^k)$$

$$E(X) = M'_X(0)$$

$$\Longrightarrow Var(X) = \sigma^2 = M''_X(0) - \left[M'_X(0)\right]^2$$

$$E(X^2) = M''_X(0)$$

مثال: اگر متغیر تصادفی X دارای توابع جرم زیر باشد، مطلوبست محاسبه‌ی تابع مولد گشتاور و محاسبه‌ی واریانس X.

$$1)\ f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} , & x > 0 \\ 0 , & ow \end{cases}$$

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} \cdot e^{-x}\, dx = \int_0^\infty e^{(t-1)x}\, dx = \frac{1}{t-1} e^{(t-1)x} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{t-1} =$$

$$\frac{1}{1-t} , \quad t < 1$$

$$M'_X(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \longrightarrow E(X) = M'_X(0) = 1$$

$$\Longrightarrow Var(X) = 2 - 1^2 = 1$$

$$M''_X(t) = \frac{2}{(1-t)^3} \longrightarrow E(X^2) = M''_X(0) = 2$$

$$2)\ P_X(x) = \begin{cases} (\tfrac{1}{2})^x , & x = 1, 2, \dots \\ 0 , & ow \end{cases}$$

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} (\tfrac{1}{2})^x = \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{e^t}{2}\right)^x = \frac{\frac{e^t}{2}}{1 - \frac{e^t}{2}} = \frac{e^t}{2 - e^t} , \quad \frac{e^t}{2} < 1$$

$$\longrightarrow t < \ln 2$$

Subject

Date

$y \mid X=x$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	جمع
$X=0$	$1/6$	$2/6$	$3/6$	1
$X=1$	$5/24$	$1/3$	$11/24$	
$X=2$	$7/30$	$1/3$	$12/30$	

$$P(y=1 \mid X=0) = \frac{P(X=0,\, y=1)}{P(X=0)} = \frac{3/72}{3/12} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$$

$$P(y=2 \mid X=0) = \frac{P(X=0,\, y=2)}{P(X=0)} = \frac{6/72}{3/12} = \frac{2}{6}$$

$$P(y=3 \mid X=0) = \frac{P(X=0,\, y=3)}{P(X=0)} = \frac{9/72}{3/12} = \frac{3}{6}$$

تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی x:

اگر $h>0$ باشد و امید ریاضی $E(e^{tx})$ به ازای $-h<t<h$ وجود داشته باشد، آنگاه آن را با $M_x(t)$ نشان داده و تابع مولد گشتاور x نامیده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} P_X(x) \\ \int e^{tx} f_X(x)\, dx \end{cases}$$

با تعریف گشتاور غیر مرکزی مرتبه kام متغیر تصادفی x به صورت زیر می‌توان به ازای مقادیر مختلف k، گشتاورهای مورد نظر را به وسیله‌ی $M_x(t)$ به صورت زیر محاسبه نمود.

$$E(X^k) = \begin{cases} \sum_x x^k P_X(x) \\ \int x^k f_X(x)\, dx \end{cases}$$

PaPCO

Subject
Date

$P_X(x) = (\frac{1}{3})^x (\frac{2}{3})^{1-x} \quad , \quad x = 0, 1$

ج) توزیع دوجمله‌ای: یکی از مشهورترین و مهمترین توزیع های ناپیوسته، توزیع دوجمله‌ای است که توزیع برنولی نیز حالت خاصی از این توزیع می باشد. چنانچه آزمایش برنولی را n بار مستقلاً تکرار نموده و متغیر تصادفی X را برابر با تعداد کل پیروزی ها در این n آزمایش تعریف کنیم در این صورت گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و P است و می نویسیم:

$X \sim B(n, P)$

تابع احتمال این متغیر تصادفی بصورت زیر است:

$$P_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} P^x (1-P)^{n-x} & , \quad x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & , \quad ow \end{cases}$$

ثابت می شود امید و واریانس این متغیر بصورت زیر است:

$E(X) = nP \quad , \quad Var(X) = nP(1-P)$ (اثبات = تمرین)

مثال: احتمال اینکه یک بسکتبالیست توپی را در یک سبد می اندازد ۷۰٪ است. اگر این شخص ۱۵ پرتاب انجام دهد و متغیر تصادفی X را برابر تعداد کل توپ های گل شده تعریف کنیم در اینصورت امید و واریانس X را بدست آورده و احتمال اینکه او موفق شود حداقل ۱۳ گل به ثمر برساند را محاسبه کنید.

$P(X = x) = \binom{15}{x} (0/7)^x (0/3)^{15-x} \quad , \quad x = 0, 1, \dots, 15$

$E(X) = nP = 15 \times 0/7 = 10/5$

$Var(X) = nP(1-P) = (10/5)(0/3) = 3/15$

$P(X \geq 13) = P(X = 13) + P(X = 14) + P(X = 15) = \binom{15}{13} (0/7)^{13} (0/3)^2 + \binom{15}{14} (0/7)^{14} (0/3) + \binom{15}{15} (0/7)^{15}$

Subject
Date

د) توزیع هندسی: فرض کنید یک آزمایش برنولی را تا حصول اولین پیروزی تکرار کنیم (به طور مستقل) در این صورت چنانچه تعداد دفعات انجام آزمایش برنولی را به عنوان متغیر تصادفی X تعریف کنیم آنگاه گوییم که متغیر تصادفی X دارای توزیع هندسی با پارامتر p است و تابع احتمال آن به شکل زیر می باشد:

$$P_X(x) = P(X=x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & , x = 1,2,\dots \\ 0 & , o.w \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad , \quad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

مثال: اگر احتمال قبول شدن یک متقاضی گواهینامه رانندگی در هر امتحان بطور ثابت ۰/۷۵ باشد. مطلوبست محاسبه ی این احتمال که شخص در چهارمین امتحان قبول شود. به طور متوسط انتظار دارد او در چندمین امتحان قبول شود؟

$$P(X=4) = (0/25)^3 (0/75) \quad , \quad E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0/75} = \frac{100}{75}$$

هـ) توزیع پواسن: اگر متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد آنگاه گوییم X دارای توزیع پواسن با پارامتر λ است.

$$P_X(x) = P(X=x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^x}{x!} & , x = 0,1,2,\dots \\ 0 & , o.w \end{cases}$$

$$E(X) = Var(X) = \lambda$$

مثال: فرض کنید تعداد اشتباهات تایپی یک صفحه از یک کتاب دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda = \frac{1}{2}$ باشد. مطلوبست محاسبه ی احتمال اینکه

الف) حداقل یک اشتباه تایپی در این صفحه وجود داشته باشد.

ب) دقیقاً ۵ اشتباه تایپی در این صفحه وجود داشته باشد.

Subject زندگی صحنه‌ی یکتای هنرمندی ماست هر کسی نغمه‌ی خود خواند از صحنه رود صحنه پیوسته بجاست
Date خرم آن نغمه که مردم بسپارند به یاد

ج) بین ۳ تا ۶ اشتباه تایپی در این صفحه وجود داشته باشد.

$$P_X(x) = \frac{e^{-1/2} \cdot (1/2)^x}{x!} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

الف) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-1/2}$

ب) $P(X = 5) = \dfrac{e^{-1/2} \cdot (1/2)^5}{5!}$

ج) $P(3 < X < 6) = P(X = 4) + P(X = 5) = \dfrac{e^{-1/2} \cdot (1/2)^4}{4!} + \dfrac{e^{-1/2} \cdot (1/2)^5}{5!}$

ب) توزیع‌های پیوسته:

۱) توزیع یکنواخت: متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی (a,b) است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد.

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad ow \end{cases}$$

امید ریاضی و واریانس این متغیر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} \, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \frac{1}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

۲) توزیع نرمال: توزیع نرمال مهمترین و پرکاربردترین توزیع آماری است که در قرن ۱۸ توسط گاوس مورد استفاده قرار گرفت. متغیر تصادفی پیوسته X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 است، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد.

Subject
Date

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2},\quad x\in\mathbb{R},\ \mu\in\mathbb{R},\ \sigma>0$$

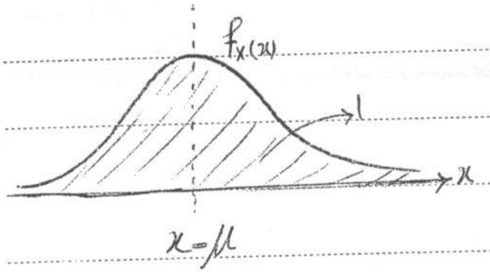
در حالت خاص اگر $\mu=0$ و $\sigma=1$ باشد در اینصورت توزیع مربوطه را توزیع نرمال استاندارد می گویند.

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}z^2},\quad z\in\mathbb{R}$$

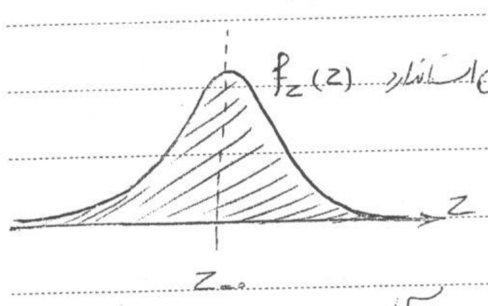
تذکر: با استفاده از خاصیت تابع چگالی احتمال می توان نتیجه گرفت

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\,dx=\sqrt{2\pi\sigma^2}$$

تذکر: با توجه به شکل تابع توزیع نرمال به سادگی نتیجه می شود که نسبت به $x=\mu$ متقارن است یعنی



$$f_X(\mu-x)=f_X(\mu+x)$$



$$f_Z(-z)=f_Z(z)$$

تذکر: اگر x دارای توزیع نرمال (μ,σ^2) باشد، $(x\sim N(\mu,\sigma^2))$ آنگاه

$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

دارای توزیع نرمال استاندارد است.

تذکر: با توجه به متقارن بودن توزیع نرمال استاندارد نسبت به صفر می توان نوشت:

$$F_Z(-z)=P(Z\leq -z)=P(Z\geq z)=1-F_Z(z)$$

Subject ________ ۴۵

Date

در انتهای کتاب‌های مقدماتی آمار جدول توزیع نرمال تهیه شده که با معلوم بودن مقدار z احتمال مورد نظر یعنی $f_z(z)$ محاسبه می‌شود.

محاسبه‌ی تابع مولد گشتاورهای توزیع نرمال: اگر $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ برای محاسبه‌ی تابع مولد گشتاورهای آن می‌توان نوشت:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+2\mu x+\mu^2-2\sigma^2 t x)} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2-2(\mu+\sigma^2 t)x\right)-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2-2(\mu+\sigma^2 t)x \pm(\mu+\sigma^2 t)^2\right)-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-\mu+\sigma^2 t\right)^2-\frac{(\mu+\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}+\frac{\mu^2+\sigma^2 t^2+2\mu\sigma^2 t}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-(\mu+\sigma^2 t)\right)^2} dx = e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

امید ریاضی و واریانس

$$M'_X(t) = (\mu + \sigma^2 t)\, e^{\mu t + \sigma^2 \frac{t^2}{2}} \rightarrow E(X) = M'_X(0) = \mu$$

Subject
Date

$$M''_X(t) = \sigma^2 e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} + (\mu + \sigma^2 t)^2 e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$E(X^2) = M''(0) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

مثال: فرض کنید نمرات درسی آمار دانشجویان دارای توزیع نرمال باشد اگر تصمیم گرفته شود به افرادی که نمره آنها از $\mu - \sigma$ کمتر باشد نمره کمتر از ۱۵ و کسانی که نمره آنها از $\sigma + \mu$ بیشتر است نمره ۲۰ داده شود در این صورت درصد افرادی که در این درس نمره نیاورده و هم چنین درصد افرادی که نمره ۲۰ گرفته اند را بدست آورید.

$\mu - \sigma \rightarrow$ تجدید

$\mu + \sigma \rightarrow 20$

$$P(X < \mu - \sigma) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < -1\right) = P(Z < -1) = 1 - \left[\frac{1}{2} + 0.3413\right] =$$

$$P(X > \mu + \sigma) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > 1\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - \left[\frac{1}{2} + P(0 \leq Z \leq 1)\right] =$$

$$1 - \left[\frac{1}{2} + 0.3413\right] =$$

مثال: اگر $X \sim N(2, 4)$ باشد احتمالات زیر را حساب کنید.

الف) $P(X < 1)$

ب) $P(X > 1)$

ج) $P(X < 3)$

د) $P(X > 3)$

الف) $P\left(\frac{X-2}{2} < \frac{1-2}{2}\right) = P(Z < -0.5) = P(Z > 0.5) = 1 - P(Z > 0.5)$

$$= 1 - \left[\frac{1}{2} + \underbrace{P(0 < Z < 0.5)}_{0.1915}\right] = 0.3085$$

ج) توزیع گاما: متغیر تصادفی پیوسته X دارای توزیع گاما با پارامترهای α و β است اگر تابع چگالی احتمال آن به شکل زیر باشد:

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \quad , x>0 \; , \alpha,\beta>0$$

که در آن

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$$

و به اختصار می‌نویسیم:

$$X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$$

در حالتی که $\alpha \in N$ آنگاه $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$ (با ا.ن.ا، جزء به جزء و تمرین)

نکته: با توجه به خاصیت $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$ داریم:

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}\, dx = \Gamma(\alpha)\, \beta^{\alpha}$$

مثال:

$$\int_0^{\infty} x^{5} e^{-x}\, dx = \Gamma(6) = 5!$$

تابع مولد گشتاور در توزیع گاما: ثابت می‌شود (تمرین) که اگر $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$ آنگاه

$$M_X(t) = (1-\beta t)^{-\alpha} \quad , t < \frac{1}{\beta}$$

$$E(X) = \alpha\beta \quad , Var(X) = \alpha\beta^2$$

Subject
Date

ب) $=1-P(X<1)=1-0/3085$

ج) $=P(X<3)-P(X<1)=P(Z<0/5)-P(Z<-0/5)=\frac{1}{2}+P(0<Z<0/5)-P(Z>0/5)$

$=\frac{1}{2}+P(0<Z<0/5)-[1-P(Z<0/5)]=\frac{1}{2}+P(0<Z<0/5)-[1-\frac{1}{2}-P(0<Z<0/5)]$

$=2P(0<Z<0/5)=2(0/1915)=$

خواص توزیع نرمال: اگر $X\sim N(\mu_x,\sigma_x^2)$ و $Y\sim(\mu_y,\sigma_y^2)$ باشد آنگاه داریم: (X و Y مستقل اند)

$Z=aX+bY+C\sim N(a\mu_x+b\mu_y+C,\ a^2\sigma_x^2+b^2\sigma_y^2)$

$W=aX+bY\sim N(a\mu_x+b\mu_y,\ a^2\sigma_x^2+b^2\sigma_y^2)$

۲- هر ترکیب خطی از توزیع های نرمال با میانگین و واریانس متغیر جدید می باشد.

مثال: اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ دارای توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ بوده و مستقل باشند آنگاه

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

$\sum_{i=1}^{n}X_i=n\bar{X}\sim N(n\mu,n\sigma^2)$

$E(\bar{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{n\mu}{n}=\mu$

$Var(\bar{X})=Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)=\frac{n\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}$

* اگر X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند. مطلوبست :

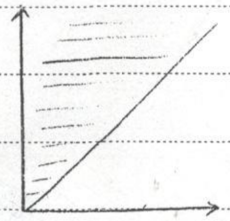
$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & o.w\end{cases}$$

الف) محاسبه‌ی توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و Y.

ب) محاسبه‌ی تابع مولد گشتاور توأم X و Y.

ج) آیا X و Y مستقل‌اند؟

د) محاسبه‌ی $E(XY)$ و واریانس Y.



الف) $$f_X(x)=\int f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_x^\infty e^{-y}\,dy=-e^{-y}\Big|_x^\infty=\begin{cases} -e^{-x}, & 0<x\\ 0, & o.w\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int f_{X,Y}(x,y)\,dx=\int_0^y e^{-y}\,dx=\begin{cases} ye^{-y}, & 0<y\\ 0, & o.w\end{cases}$$

ب) $$M_{X,Y}(t_1,t_2)=\int_0^\infty\int_0^y e^{t_1x}+e^{t_2y}\cdot e^{-y}\,dx\,dy=\int_0^\infty \frac{1}{t_1}e^{t_1x+t_2y-y}\Big|_0^y\,dy=$$

$$=\int_0^\infty\left(\frac{1}{t_1}e^{y(t_1+t_2-1)}-\frac{1}{t_1}e^{y(t_2-1)}\right)dy=\left[\frac{1}{t_1(t_1+t_2-1)}e^{y(t_1+t_2-1)}-\frac{1}{t_1(t_2-1)}e^{y(t_2-1)}\right]_0^\infty$$

$$,\quad \begin{matrix} t_2-1<0 \\ t_1+t_2-1<0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} t_2<1 \\ t_1+t_2<1\end{matrix}$$

$$M_{X,Y}(t_1,t_2)=\frac{1}{(t_2-1)(t_1+t_2-1)},\quad t_2<1,\quad t_1+t_2<1$$

ج) $$M_X(t_1)=M_{X,Y}(t_1,0)=\frac{-1}{t_1-1}$$

$$M_Y(t_2)=M_{X,Y}(0,t_2)=\frac{1}{(t_2-1)^2}$$

چون $M_{X,Y}(t_1,t_2)\neq M_X(t_1)\cdot M_Y(t_2)$ پس نمی‌توان استقلال X و Y را نتیجه گرفت.

د) $$\frac{\partial M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1}=\frac{-(t_2-1)}{(t_2-1)^2(t_1+t_2-1)^2}=\frac{1}{(1-t_2)(t_1+t_2-1)^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_2\,\partial t_1}=$$

$$=(1-t_2)^{-2}(t_1+t_2-1)^{-2}-2(1-t_2)(t_1+t_2-1)^{-3}\Rightarrow t_1,t_2=0\Rightarrow E(XY)=1+2=3$$

Subject

Date

$$\frac{\partial M_y(t_۲)}{\partial t_۲} = \frac{-۲}{(t_۲-۱)^۳} \Rightarrow E(y) = ۲$$

$$\frac{\partial^۲ M_y(t_۲)}{\partial t_۲^۲} = \frac{۶}{(t_۲-۱)^۴} \Rightarrow E(y^۲) = ۶$$

$$Var(y) = E(y^۲) - E^۲(y) = ۶ - ۴ = ۲$$

جدول ۳ـ توزیع نرمال

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998