که در اینجا $\cancel{F} = \cancel{C}$ ۳ است. فرض کنید $\cancel{t}$ بیانگر طول عمر یک قطعه (به هزار ساعت) باشد، آنگاه

$$C \; \cancel{P} = \begin{cases} ۶ & x < ۱۰ \\ ۳ & x \geq ۱۰ \end{cases}$$

۱,۵

و لذا

$$E(\cancel{P}) = ۶ \times P(T < ۱۰) + ۳P(T \geq ۱۰) = ۳P(T < ۱۰) + ۳ = ۳/۵۴۴$$

۱,۵

۴ − ۳,۵۴۴ = ۰,۴۵۶

بنابراین

$$E(F) = E(P) - E(C) = ۳/۵۴۴ - ۳ = ۰/۵۴۴ \text{ (هزار تومان)}$$

۱,۵

۶.۳ توزیع نرمال

توزیع نرمال نقش اساسی و گسترده‌ای در آمار نظری و آمار کاربردی دارد. این توزیع مدل مناسبی برای بسیاری از پدیده‌های واقعی و متغیرهای طبیعی است. نام نرمال نیز از همین نکته گرفته شده است. مباحث مربوط به توزیع نرمال بسیار است. در این بخش تنها آنچه که در سطح کتاب حاضر لازم داریم گفته می‌شود. در فصول بعد که همواره نام توزیع نرمال به چشم می‌خورد، خواهیم دید که این توزیع در استنباطهای آماری نیز نقش اساسی دارد.

میانگین

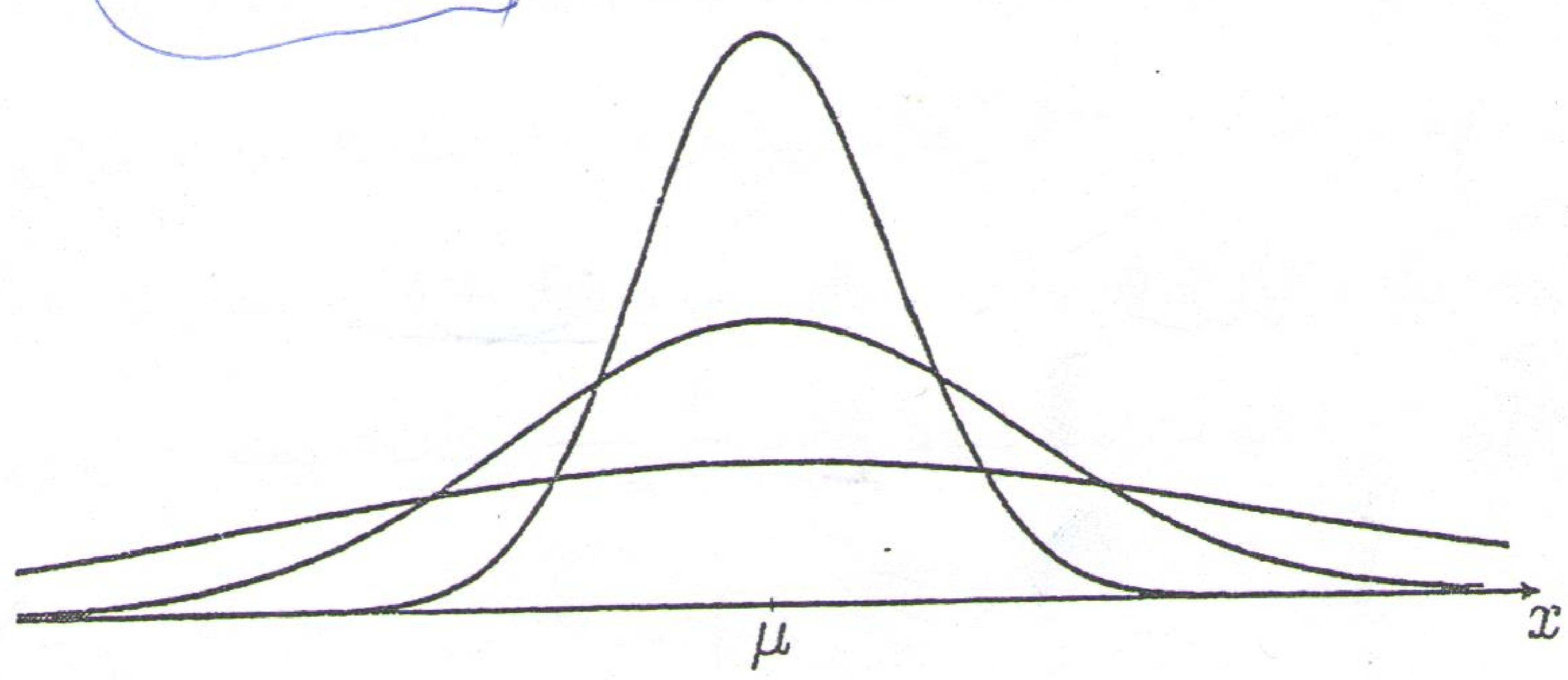
تعریف ۱۰.۳ چنانچه متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال به صورت زیر باشد

تابع چگالی

$$f(x; \mu, \sigma^۲) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}} \qquad x \in \mathbb{R}\,,\ \sigma > ۰$$

واریانس

گوییم X توزیع نرمال با پارامترهای μ و $\sigma^۲$ دارد و می‌نویسیم $\boxed{X \sim N(\mu, \sigma^۲)}$.



شکل ۹.۳ نمودار چند تابع چگالی احتمال نرمال

میانگین و میانه نما

چند نکته درباره‌ی توزیع نرمال

میانگین و واریانس: می‌توان ثابت کرد که در توزیع نرمال، $\boxed{E(X) = \mu \text{ و } V(X) = \sigma^2}$ (به عنوان تمرین این دو رابطه را ثابت کنید). به همین دلیل است که برای نشان دادن پارامترهای توزیع نرمال معمولاً از نمادهای μ و σ^2 استفاده می‌شود.

شکل تابع چگالی: نمودار تابع چگالی احتمال نرمال، زنگدیس و حول خط $x = \mu$ (میانگین) متقارن است. به دلیل تقارن، میانه توزیع نیز همین نقطه است. با مشتق‌گیری معلوم می‌شود که $f(x)$ به ازای μ ماکزیمم است (از روی شکل نیز این نکته آشکار است). لذا در توزیع نرمال، میانگین و میانه و نما منطبق برهم‌اند. پارامتر σ تغییرپذیری توزیع را نشان می‌دهد. هرچه σ کوچکتر باشد توزیع فشرده‌تر و نمودار آن برجسته‌تر است.

الگویی برای متغیرهای طبیعی: بسیاری از متغیرهای طبیعی، دست‌کم به طور تقریب، از یک توزیع نرمال پیروی می‌کنند. برای مثال قد افراد در یک سن خاص، مقاومت کششی میله‌های آهن یک خط تولید، خطاهای اندازه‌گیری یک کمیت فیزیکی، رشد نوعی گیاه در یک فاصله زمانی، وزن شمش‌های تولیدی یک کارخانه، تقریباً توزیع نرمال (با μ و σ^2 مناسب) دارند.

در اینجا یک نکته شایان یادآوری است. همچنان‌که شکلهای ۹.۳ نشان می‌دهند، در توزیع نرمال تقریباً تمام احتمال در دامنه‌ای محدود حول میانگین واقع است. به طوری که احتمال مشاهده‌ای خارج از این دامنه عملاً صفر است. به این دلیل می‌توان توزیع نرمال را در مدل‌سازی مشاهدات مربوط به متغیرهای تصادفی کراندار، مانند آنهایی که مثال زدیم، نیز به کار برد.

توزیع نرمال استاندارد: استفاده از توزیع نرمال به طور مستقیم دشوار است. زیرا محاسبه احتمال‌های مربوط به این توزیع مستلزم محاسبه انتگرالها به روش‌های عددی است. برای پرهیز از این دشواری از حالت خاصی از توزیع نرمال به نام توزیع نرمال استاندارد استفاده می‌شود.

نخست اشاره می‌کنیم که می‌توان ثابت کرد اگر متغیر تصادفی X توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 داشته باشد، آنگاه متغیر تصادفی $aX + b$ توزیع نرمال با میانگین $a\mu + b$ و واریانس $a^2\sigma^2$ دارد. از این مطلب نتیجه می‌شود که متغیر تصادفی $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک دارد.

σ^2

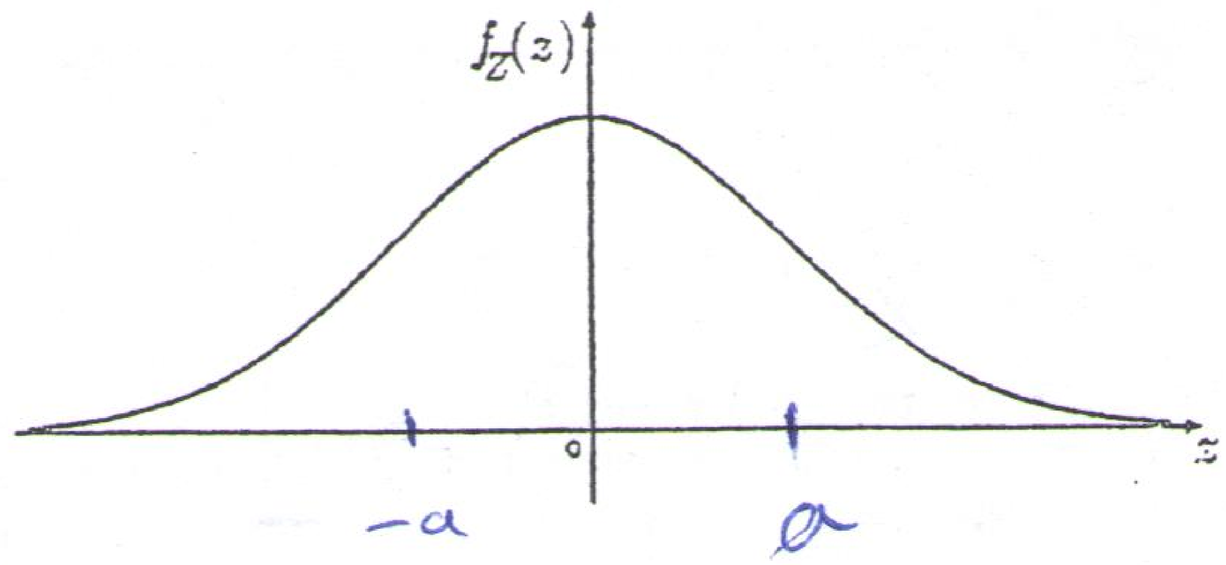
$E(Z) = 0$

$var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} var$

$var(Z) = 1$

این توزیع را نرمال استاندارد می‌نامند. پس تابع چگالی احتمال نرمال استاندارد عبارت است از

$$f_Z(z) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{z^۲}{۲}} \quad . \quad -\infty < z < \infty$$



شکل ۱۰.۳ نمودار تابع چگالی احتمال نرمال استاندارد

در عمل هر عبارت احتمالی مربوط به یک توزیع نرمال دلخواه را به عبارتی برحسب توزیع نرمال استاندارد تبدیل می‌کنیم. سپس این احتمال را از جدول نرمال استاندارد به دست می‌آوریم. جدول ۳ انتهای کتاب احتمال‌های تجمعی $P(Z \le z)$ را به ازای مقادیر مختلف z ارائه می‌دهد. هر درایه جدول برای مقدار مفروض z، که حاصل تلاقی سطر و ستون متناظر است، مقدار $P(Z \le z)$ را می‌دهد. این احتمال تجمعی با مساحت سایه‌خورده در شکل بالای جدول نمایش داده شده است. برای نمونه

۰/۶۵۸۷

$$\begin{aligned}
P(Z \le ۱/۵۲) &= ۰/۹۳۵۷ \\
P(Z \le -۰/۳۹) &= ۰/۳۴۸۳ = P(Z \ge ۰/۳۹) = ۱ - P(Z < ۰/۳۹) \\
P(Z > ۰/۲۵) &= ۱ - P(Z \le ۰/۲۵) = ۱ - ۰/۵۹۸۷ = ۰/۴۰۱۳ \\
P(-۰/۳۱ < Z < ۰/۷۹) &= P(Z < ۰/۷۹) - P(Z \le -۰/۳۱) \\
&= ۰/۷۸۵۲ - ۰/۳۷۸۳ = ۰/۴۰۶۹
\end{aligned}$$

$\rightarrow ۱ - P(Z < ۰/۳۱)$

توجه دارید که Z متغیر تصادفی پیوسته است و لذا در داخل عبارات فوق، بودن یا نبودن مساوی فرقی ندارد. دیگر اینکه با توجه به تقارن توزیع نرمال استاندارد حول صفر، داریم

$$P(Z \le -z) = ۱ - P(Z \le z)$$

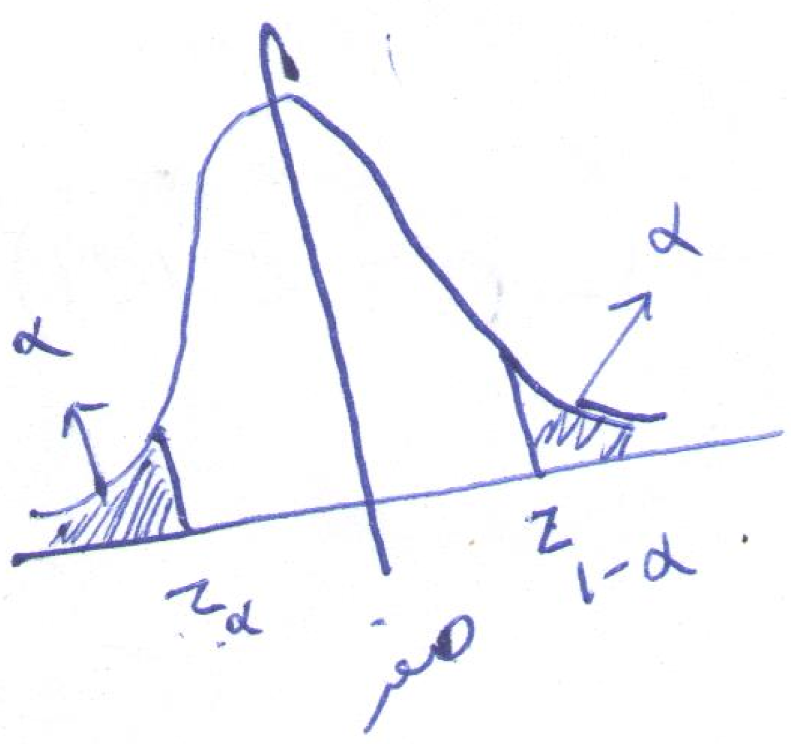
مثال ۱۰.۳ فرض کنید متغیر تصادفی X توزیع نرمال با میانگین $\mu = ۱۵$ و واریانس $\sigma^۲ = ۱۲$ دارد. مطلوب است

الف) $P(X < ۱۰)$ ب) $P(X > ۱۶)$ پ) $P(۱۲ < X < ۲۰)$

حل: در هر مورد احتمال مربوطه را به احتمالی برحسب توزیع نرمال استاندارد تبدیل می‌کنیم. برای این‌کار عبارت داخل هر پرانتز را استاندارد می‌کنیم. به علاوه چون جدول انتهای کتاب احتمال‌های تجمعی تا هر نقطه را می‌دهد لذا عبارت‌های مربوط به (ب) و (پ) را تبدیل به عبارت‌هایی به صورت کوچکتری درمی‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
P(X < ۱۰) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{۱۰-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{۱۰-۱۵}{\sqrt{۱۲}}\right) \\
&= P(Z < -۱/۴۴) = ۰/۰۷۴۹ \qquad 1-P(Z<1,44) \\
P(X > ۱۶) &= ۱ - P(X \le ۱۶) = ۱ - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{۱۶-\mu}{\sigma}\right) \\
&= ۱ - P(Z \le ۰/۲۹) = ۱ - ۰/۶۱۴۱ = ۰/۳۸۵۹ \\
P(۱۲ < X < ۲۰) &= P(X < ۲۰) - P(X \le ۱۲) \\
&= P(Z < ۱/۴۴) - P(Z \le -۰/۸۷) \\
&= ۰/۹۲۵۱ - ۰/۱۹۲۲ = ۰/۷۳۲۹
\end{aligned}
$$

صدک‌های توزیع نرمال: صدک αام توزیع نرمال استاندارد را با Z_α نشان می‌دهیم. مقدار Z_α عددی روی محور Z هاست که احتمال تجمعی تا آن نقطه برابر α می‌باشد. یعنی $P(Z \le z_\alpha) = \alpha$. بنا به تقارن توزیع داریم: $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$. برای نمونه چند صدک عبارت‌اند از



$z_{۰/۶۷} = ۰/۴۴$ $\quad z_{۰/۹۵} = ۱/۶۵$

$z_{۰/۹۰} = ۱/۲۸$ $\quad z_{۰/۹۷۵} = ۱/۹۶$

در آینده از صدک‌های توزیع نرمال استاندارد بسیار استفاده خواهیم کرد.

مثال ۱۱.۳ میزان رشد یک نوع نهال طی یک ماه، متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۱۵ سانتیمتر و انحراف معیار ۱/۲ سانتیمتر است. احتمال اینکه نهالی از این نوع طی یک ماه بیش از ۱۷ سانتیمتر رشد کند چقدر است؟ این احتمال در عمل به چه معناست؟ ۹۰% نهال‌ها ~~دست‌کم~~ چه رشدی دارند؟

حداکثر