فصل ۳

متغیرهای تصادفی و توزیع‌های مهم پیوسته

۱.۳ متغیر تصادفی پیوسته، تابع چگالی و تابع توزیع

همان طور که در آغاز فصل دوم گفته شد، چنانچه S_X، یعنی مجموعه مقادیر متغیر تصادفی X، یک پیوستار باشد آنگاه X یک متغیر تصادفی از نوع پیوسته است. در این حالت، مانند حالت متغیرهای تصادفی گسسته قادر به انتساب احتمال به نقاط واقع در پیوستار نیستیم. در عوض، مقادیر احتمال را به بازه‌ها (و کلاً به زیرمجموعه‌های پیوستار) نسبت می‌دهیم. تابعی که این نوع انتساب را برقرار کند، تابع چگالی احتمال X نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۳ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته X، تابعی نامنفی مانند $f_X(x)$ است، به طوری که برای هر زیرمجموعه A از اعداد حقیقی، داشته باشیم

$$\boxed{P(X \in A) = \int_A f_X(x)dx} \tag{۱.۳}$$

(رابطه فوق را با رابطه متناظر درباره‌ی متغیرهای تصادفی گسسته در بخش ۱.۲ مقایسه کنید). مقدار $f_X(x)$ چگالی احتمال (و نه مقدار احتمال) در x نامیده می‌شود. مقدار $f_X(x)$ در یک نقطه مثلاً $x = a$، فشردگی احتمال را در نقاط نزدیک به a نشان می‌دهد.

چند نکته

۱ـ در حالتی که $A = S_X$، داریم $P(X \in S_X) = ۱$ و لذا $\int_S f_X(x)dx = ۱$. چون احتمال قرار گرفتن X در خارج از S_X صفر است، رابطه اخیر گاهی به صورت $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = ۱$ نوشته می‌شود.

۲ـ چنانچه $A = [a, b]$، آنگاه به دست می‌آوریم: $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$، اگر در این تساوی قرار دهیم $a = b$، آنگاه $P(X = a) = \int_a^a f_X(x)dx = ۰$. تساوی اخیر بیان می‌کند، احتمال اینکه یک متغیر تصادفی پیوسته مقداری خاص را اختیار کند برابر صفر است.

۳ـ از لحاظ هندسی، مساحت زیر نمودار $f_X(x)$، محدود به هر بازه‌ی خاص، برابر با احتمال این است که X مقداری در این بازه اختیار کند. واضح است که کل مساحت زیر نمودار هر تابع چگالی احتمال برابر یک است.

۴ـ مفهوم چگالی احتمال را می‌توان با مفهوم چگالی جرم در فیزیک مقایسه کرد. مثلاً یک میله فلزی دارای یک تابع چگالی جرم است که نشان می‌دهد چگالی جرم در هر نقطه از آن میله چقدر است. چگالی جرم در هر نقطه از میله مثبت است و حتی می‌تواند بزرگتر از یک باشد، اما صحبت از وزن میله در یک نقطه خاص بی معنی است. از طرف دیگر هر قطعه از میله دارای وزنی است که می‌توان بر پایه‌ی تابع چگالی جرم میله آن را محاسبه کرد. به همین ترتیب در مورد تابع چگالی احتمال می‌توان گفت که چگالی احتمال در هر نقطه مثبت است، گرچه احتمال در هر نقطه صفر است. از طرف دیگر هر مجموعه دارای احتمالی است که می‌توان آن را بر پایه‌ی تابع چگالی احتمال و طبق فرمول (۱.۳) محاسبه کرد.

مثال ۱.۳ مدت زمانی که نوعی غذا در یخچال سالم می‌ماند (X، برحسب روز) متغیر تصادفی پیوسته‌ای است که تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر است

$$f(x) = k(۲۰ - x) \qquad ۰ \leq x \leq ۲۰$$

الف) مقدار k را بیابید و نمودار تابع چگالی را رسم کنید.

ب) احتمال آنکه غذایی از نوع فوق قبل از ۱۰ روز فاسد شود، چقدر است؟

حل: الف) باید داشته باشیم $\int_۰^{۲۰} k(۲۰ - x)dx = ۱$، که به دست می‌آوریم $k = ۰/۰۰۵$.

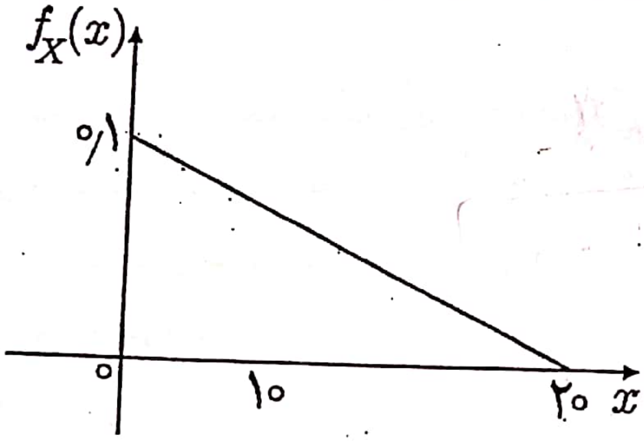
ب) برای محاسبه احتمال این پیشامد که غذایی از نوع فوق پیش از ۱۰ روز فاسد شود، باید $P(X < ۱۰)$

الف) $\int_{0}^{20} f(x)dx = 1 \to \int_{0}^{20} k(20-x)\,dx = 1 \to 20kx - \frac{1}{2}kx^2 \Big|_{0}^{20} = 1 \to 400k - 200k = 1 \to 200k = 1 \to k = \frac{1}{200}$

را محاسبه کنیم. داریم

$$P(X < ۱۰) = \int_{۰}^{۱۰} ۰/۰۰۵(۲۰ - x)dx = ۰/۷۵$$

به عبارت دیگر، ۷۵% از غذاها حداکثر ۱۰ روز، و ۲۵% از غذاها دست‌کم ۱۰ روز سالم می‌مانند.



شکل ۱.۳ نمودار تابع چگالی احتمال X: زمان سالم ماندن غذا، در مثال ۱.۳

تعریف ۲.۳ تابع توزیع (تجمعی) متغیر تصادفی پیوسته X، $F_X(x)$، به صورت زیر تعریف می‌شود

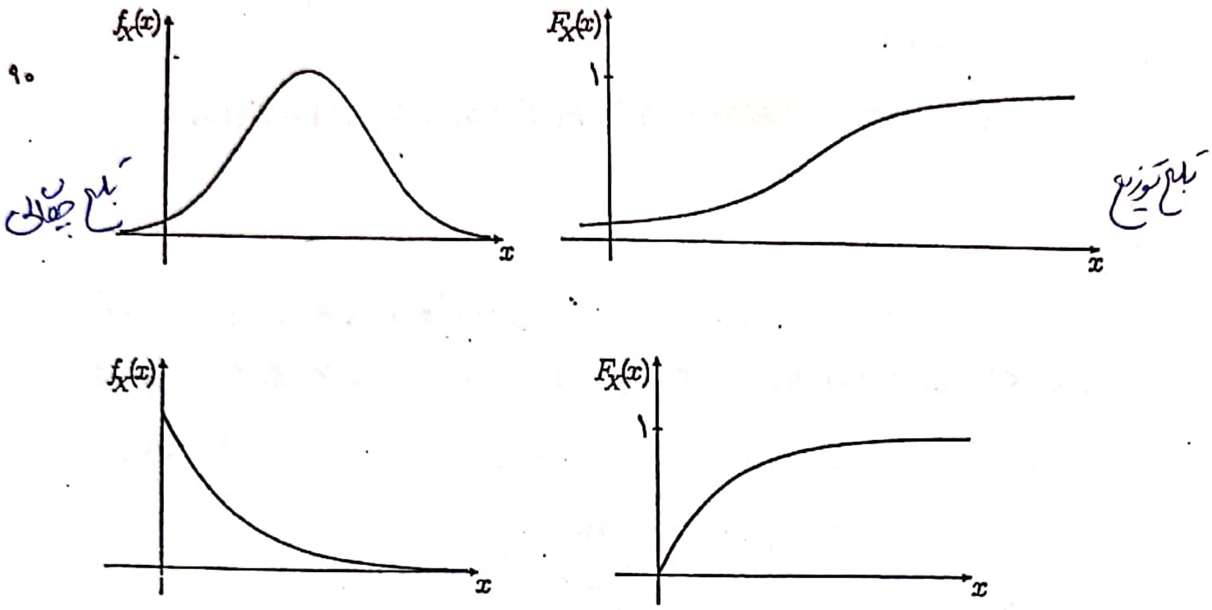
$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \le x) \qquad P(X \in (-\infty, x]) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \quad , \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

تابع $F_X(x)$، احتمال این را نشان می‌دهد که متغیر تصادفی X، مقداری کوچکتر یا برابر عدد مشخص x اختیار کند. از رابطه اخیر نتیجه می‌شود که $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$. یعنی در حالت پیوسته، تابع چگالی احتمال مشتق تابع توزیع احتمال است.

در بخش ۲.۲ دیدیم که برای متغیرهای تصادفی گسسته، $F_X(x)$ یک تابع پله‌ای است. چنانچه متغیر تصادفی X پیوسته باشد، نمودار $F_X(x)$ هموار است. بقیه ویژگی‌های تابع توزیع در این حالت نیز برقرار است، یعنی $\boxed{F_X(-\infty) = ۰ \text{ و } F_X(\infty) = ۱}$ و اینکه $F_X(x)$ تابعی غیر نزولی است. در شکل ۲.۳ دو تابع چگالی و توابع توزیع آنها رسم شده‌اند.

پیوسته

تابع صعودی



شکل ۲.۳ دو تابع چگالی احتمال و توابع توزیع آنها

مثال ۲.۳ الف) تابع توزیع متغیر تصادفی مثال ۱.۳ را بیابید و رسم کنید.

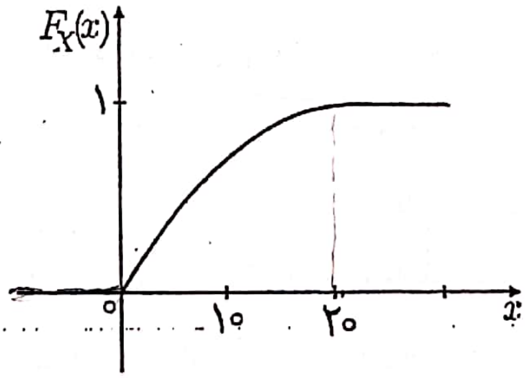
ب) مقادیر $P(X < ۱۵)$ و $P(۵ < X < ۱۵)$ را بیابید.

حل: الف) طبق تعریف تابع توزیع

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_۰^x ۰/۰۰۵(۲۰ - t)dt = ۰/۱x - ۰/۰۰۲۵x^۲$$

پس

$$F_X(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ ۰/۱x - ۰/۰۰۲۵x^۲ & ۰ \leq x < ۲۰ \\ ۱ & ۲۰ \leq x \end{cases}$$



شکل ۳.۳ نمودار تابع توزیع احتمال X در مثال ۱.۳

ب)

۰/۱ × ۲۰ − ۰/۰۰۲۵(۲۰^۲)

$$P(X < ۱۵) = F_X(۱۵) = ۰/۱ \times ۱۵ - ۰/۰۰۲۵(۱۵)^۲ = ۰/۹۴$$

$$P(5 < X < 15) = P(X < 15) - P(X < 5) = F_X(15) - F_X(5)$$
?
$$= 0/94 - 0/44 = 0/50$$

۲.۳ امید ریاضی و واریانس

تعریف ۳.۳ اگر X متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه امید ریاضی (میانگین) X به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

یعنی S_x هم دارم

چنانچه این انتگرال وجود نداشته باشد، گوییم میانگین X وجود ندارد. توجه دارید که رابطه بالا شبیه رابطه‌ای است که در تعریف ۴.۲ ارائه شد، با این تفاوت که به‌جای مجموع‌یابی، انتگرال‌گیری قرار گرفته است. از نظر فیزیکی $E(X)$ مرکز ثقل یک میله است که تابع چگالی جرم آن $f_X(x)$ باشد.

برای متغیر تصادفی $g(X)$ یعنی تابعی از متغیر تصادفی X، مقدار زیر را، در صورت وجود، امید ریاضی $g(X)$ گوییم

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

تعریف ۴.۳ واریانس متغیر تصادفی پیوسته X، به صورت زیر تعریف می‌شود

فرمول به صورت زیر

$$V(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X) f_X(x) dx$$ و $V(x) = E(x^2) - E^2(x) = \int_{S_x} x^2 f_X(x) dx$

چنانچه انتگرال فوق همگرا نباشد، گوییم واریانس X وجود ندارد. به طور مشابه با حالت گسسته، جذر مثبت واریانس را انحراف معیار می‌نامیم، یعنی $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$.

چند نکته را، مشابه با حالت گسسته، یادآوری می‌کنیم. نخست اینکه واریانس X، در واقع میانگین متغیر تصادفی $(X - \mu_X)^2$ است. به همین جهت واریانس معیاری برای بررسی پراکندگی مقادیر ممکن X نسبت به میانگین آن می‌باشد. از دیدگاه فیزیکی، واریانس برابر است با گشتاور ماند چگالی $f(x)$ نسبت به محور متعامدی که از مرکز ثقل یعنی میانگین می‌گذرد. از نظر عملی انحراف معیار بر واریانس برتری دارد زیرا دارای همان واحدی است که مقادیر متغیر تصادفی برحسب آن اندازه‌گیری می‌شود. یک روش ساده‌تر محاسبه واریانس فرمول زیر است

$$V(X) = E(X^۲) - E^۲(X)$$

$V(x) =$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^۲ f_X(x)dx - \mu_X^۲$$

همه‌ی ویژگی‌هایی که در فصل ۲ برای امید ریاضی و واریانس متغیرهای تصادفی گسسته ذکر کردیم، برای حالت پیوسته نیز برقرار است. به ویژه اینکه (a و b دو عدد ثابت)

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$
$$V(aX+b) = a^۲V(X)$$

مثال ۳.۳ مدت زمان مکالمات تلفنی در یک شرکت (T، برحسب دقیقه) از تابع چگالی احتمال زیر پیروی می‌کند. میانگین و انحراف معیار مدت زمان مکالمات را بیابید. میانه‌ی زمان مکالمات را به دست آورید.

امید ریاضی

$$f_T(t) = ۰/۴e^{-۰/۴t} \qquad t > ۰$$

حل:

$t = u \to dt = du$

$۰/۴e^{-۰/۴t}dt = dv \to v = -e^{-۰/۴t}$

$$E(T) = \int_۰^{\infty} t f_T(t)dt = \int_۰^{\infty} ۰/۴te^{-۰/۴t}dt = ۲/۵$$
$$E(T^۲) = \int_۰^{\infty} t^۲ f_T(t)dt = \int_۰^{\infty} ۰/۴t^۲e^{-۰/۴t}dt = ۱۲/۵$$
$$V(T) = E(T^۲) - E^۲(T) = ۱۲/۵ - (۲/۵)^۲ = ۶/۲۵$$

$= -te^{-۰/۴t} + \int e^{-۰/۴t}dt = -te^{-۰/۴t} - \frac{1}{۰/۴}e^{-۰/۴t}\Big|_۰^{\infty} = \frac{1}{۰/۴} = ۲/۵$

و لذا $\sigma_T = \sqrt{۶/۲۵} = ۲/۵$. می‌دانیم که میانه، m، عددی است که نیمی از فراوانی‌ها کمتر از آن و بقیه بیش از آن باشند. درباره متغیرهای تصادفی پیوسته، میانه عددی است که $P(X<m) = \frac{۱}{۲}$. پس می‌نویسیم

$$P(X<m) = \int_۰^m ۰/۴e^{-۰/۴t}dt = \frac{۱}{۲}$$

$\Rightarrow -e^{-۰/۴t}\Big|_۰^m = \frac{1}{۲}$

و به دست می‌آوریم $m = ۱/۷۳$. در این مثال $\mu_T = ۲/۵$ یعنی متوسط زمان مکالمات تلفنی شرکت ۲/۵ دقیقه است، و $V(T) = ۶/۲۵$ یعنی متوسط مجذور تفاوت زمان مکالمات از میانگین برابر ۶/۲۵ است، و $m = ۱/۷۳$ یعنی نیمی از مکالمات کوتاهتر از ۱/۷۳ دقیقه و نیم دیگر بیش از این زمان به

$-e^{-۰/۴m} + 1 = \frac{1}{۲}$

$e^{-۰/۴m} = \frac{1}{۲}$ از طرفین ln میگیریم

$m = \frac{\ln ۲}{۰/۴} \leftarrow -۰/۴m = -\ln ۲$

درازا می‌کشند.

تذکر از این پس از نوشتن اندیس X در $f_X(x)$ و $F_X(x)$ چشم‌پوشی کرده و، به جز در موارد خاص، از $f(x)$ و $F(x)$ برای نشان دادن تابع چگالی احتمال و تابع توزیع احتمال استفاده می‌کنیم.

چگالی ← تا توزیع

۳.۳ توزیع یکنواخت

بعضی از متغیرهای تصادفی، و به طور متناظر توابع توزیع آنها، از لحاظ نظری یا کاربردی اهمیت ویژه‌ای دارند. در این بخش و بخش‌های آینده، رایج‌ترین توزیع‌های تصادفی پیوسته را معرفی نموده و بعضی از ویژگی‌ها و کاربردهای آنها را مطالعه می‌کنیم.

تعریف ۵.۳ چنانچه X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\leq x\leq b\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & , x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\leq x<b\\ 1 & , x\geq b\end{cases}$$

گوییم X توزیع یکنواخت بر بازه $[a,b]$ دارد و می‌نویسیم $X\sim U(a,b)$.

نام یکنواخت از آنجا ناشی می‌شود که چگالی احتمال متغیر تصادفی X در بازه $[a,b]$ یکنواخت و ثابت است. با توجه به نمودار تابع چگالی احتمال $f(x)$، آن را توزیع مستطیلی هم می‌نامند.

اگر $X\sim U(a,b)$، آنگاه $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$ و $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$. به عنوان تمرین، درستی این روابط را بررسی کنید. $\int x\cdot\frac{1}{b-a}dx$

$\sigma_X = \sqrt{var(X)}$

توزیع یکنواخت علاوه بر اینکه الگوی مفیدی برای بررسی بعضی از پدیده‌های تصادفی است، در انتخاب اعداد تصادفی نیز کاربرد دارد. منظور از انتخاب یک عدد تصادفی از یک بازه، تعیین مقداری از یک متغیر تصادفی است که بر آن بازه به طور یکنواخت توزیع شده است.

مثال ۴.۳ هنگامی‌که یک کابل معلق به طول ۱۵۰ متر پاره می‌شود، امکان پارگی در نقاط مختلف آن یکسان است. فرض کنید X فاصله یک انتهای کابل تا نقطه پارگی باشد.

توزیع یکنواخت

الف) تابع چگالی احتمال X را بنویسید و رسم کنید.

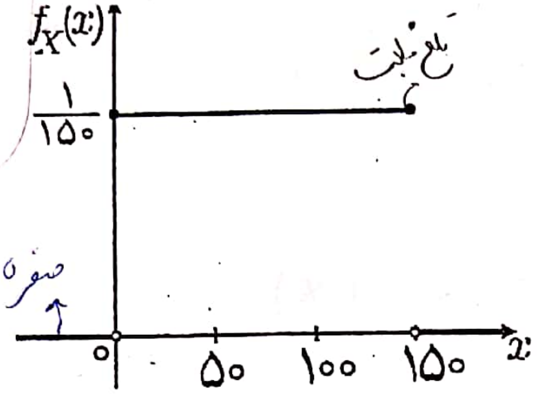
ب) تابع توزیع X را به دست آورید و رسم کنید.

پ) $P(X\leq 100)$ را بیابید و تعبیر کنید.

ت) $E(X)$ و σ_X را محاسبه کنید.

حل: الف)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۱۵۰}, \ b-a & ۰ \leq x \leq ۱۵۰ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$



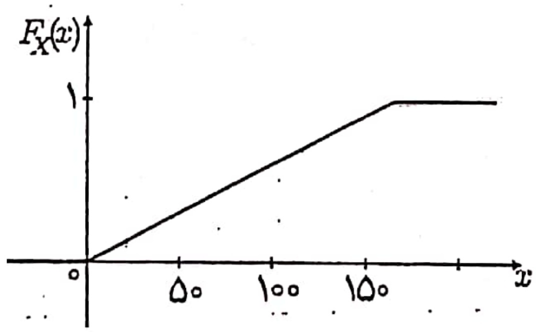
شکل ۴.۳ نمودار تابع چگالی احتمال یکنواخت مربوط به مثال ۵.۳

ب) چون برای $۰ \leq x \leq ۱۵۰$،

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_۰^x \frac{۱}{۱۵۰} dt = \frac{x}{۱۵۰}$$

پس

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ \frac{x}{۱۵۰} & ۰ \leq x < ۱۵۰ \\ ۱ & ۱۵۰ \leq x \end{cases} \qquad \frac{x-a}{b-a}$$



شکل ۵.۳ نمودار تابع توزیع یکنواخت مربوط به مثال ۵.۳

پ)

توزیع   تابع وسط   تابع MVE

$$P(X \leq ۱۰۰) = F(۱۰۰) = \frac{۱۰۰}{۱۵۰} = \frac{۲}{۳}$$

$$E(X) = \frac{۱۵۰+۰}{۲} = ۷۵, \quad \sigma_X = \frac{۱۵۰}{۲\sqrt{۳}} \qquad Var(x) = \frac{۱۵۰^۲}{۱۲} \rightarrow \sigma_x = \frac{۱۵۰}{۲\sqrt{۳}}$$

توزیع نمایی: گوئیم X دارای توزیع نمایی است با پارامتر λ هرگاه تابع چگالی آن به شکل زیر باشد:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x>0 \\ 0 & , \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad , \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$F_X(x) = -\int_0^x -\lambda e^{-\lambda t}\,dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = -e^{-\lambda x}+1$$

$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ 1-e^{-\lambda x} & , 0 \leq x \\ \cancel{1} & , \cancel{x \geq 1} \end{cases}$$

مثال: اگر X دارای توزیع نمایی با $\lambda = 0.128$ باشد، مطلوب است:

۱) بدست آوردن تابع چگالی X، ۲) تابع توزیع X، ۳) $P(X>7)$، ۴) میانه X

$\lambda = ۰/۲۳۸$. بنابراین

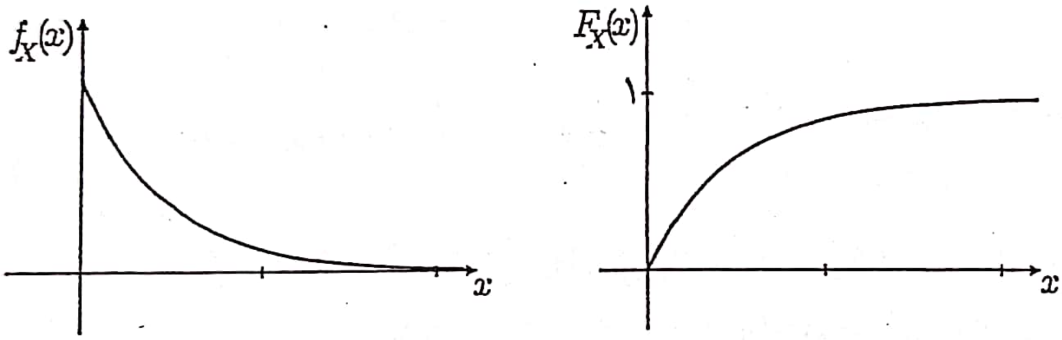
$$f(x) = ۰/۲۳۸e^{-۰/۲۳۸x} \quad , \quad x > ۰$$

و همچنین، برای $x \geq ۰$، داریم

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_۰^x f(t)dt = \int_۰^x ۰/۲۳۸e^{-۰/۲۳۸t}dt = ۱ - e^{-۰/۲۳۸x}$$

پس

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ ۱ - e^{-۰/۲۳۸x} & x \geq ۰ \end{cases}$$



شکل ۳.۶ نمودار تابع چگالی احتمال و تابع توزیع نمایی مثال ۳.۶

ب) مقدار احتمال مورد نظر را می‌توان بر پایه‌ی تابع چگالی احتمال و به صورت زیر به دست آورد

$$P(X > ۷) = \int_۷^\infty f(x)dx = \int_۷^\infty ۰/۲۳۸e^{-۰/۲۳۸x}dx$$

البته این احتمال را به روش ساده‌تر و بر اساس تابع توزیع نیز می‌توان به دست آورد

$$P(X > ۷) = ۱ - P(X \leq ۷) = ۱ - F(۷) = ۱ - [۱ - e^{-۰/۲۳۸\times۷}] = ۰/۱۸۹$$

برای نیم عمر ایزوتوپ باید میانه‌ی طول عمر را بیابیم. یعنی مقدار m به قسمی که

$$\int_۰^m f(x)dx = \int_۰^m ۰/۲۳۸e^{-۰/۲۳۸x}dx = \frac{۱}{۲}$$

که $m = ۲/۹۱۲$ به دست می‌آید.

ویژگی فقدان حافظه

یک ویژگی مهم متغیر تصادفی نمایی، بی‌حافظه‌گی آن است.

تعریف ۷.۳ گزیم متغیر تصادفی X (یا اصطلاحاً توزیع آن) فاقد حافظه است اگر

$$P(X > s+t | x > t) = P(X > s) \quad , \quad \forall t, s \geq 0$$

تحت شرایطی کلی، توزیع هندسی تنها توزیع گسسته فاقد حافظه، و توزیع نمایی نیز تنها توزیع پیوسته فاقد حافظه است. اثبات اینکه توزیع نمایی فاقد حافظه است، آسان می‌باشد. فرض کنید $X \sim E(\lambda)$ و t, s دو عدد نامنفی دلخواه باشند. در این صورت

توزیع‌های Exp Exponential

$$P(X > s+t | X > t) = \frac{P(X > s+t)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s)$$

اثبات اینکه تنها توزیع پیوسته فاقد حافظه، توزیع نمایی است، در مسئله تحقیقی ۴.۳ از خواننده خواسته شده است.

مثال ۶.۳ در یک خط تولید، قطعاتی ساخته می‌شوند که طول عمر آنها توزیع نمایی با میانگین ۷/۶ (هزار ساعت) است. احتمال آنکه قطعه‌ای از این نوع بیش از ۵ (هزار ساعت) کار کند، چقدر است؟ فرض کنید یک قطعه ۲ (هزار ساعت) کار کرده است، احتمال آنکه ۵ (هزار ساعت) دیگر کار کند چقدر است؟

$\frac{1}{\lambda} =$

$\frac{1}{\lambda} = \frac{۷۶}{۱۰}$

$۱۰ = ۷۶\lambda$

$\lambda \; \frac{۱۰}{۷۶}$

حل: چنانچه متغیر تصادفی طول عمر قطعات را با T نشان دهیم، آنگاه

$$f_T(t) = \frac{1}{7/6} e^{-\frac{t}{7/6}} \quad , \quad t \geq 0$$

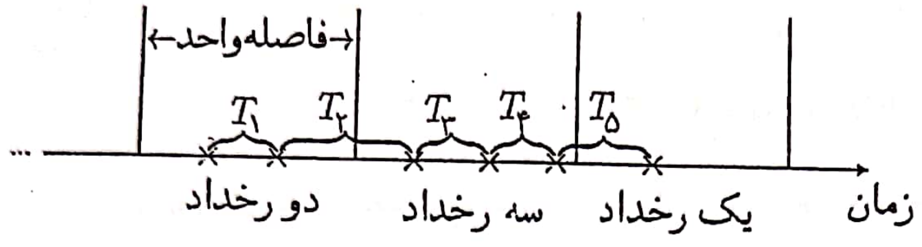
بنابراین

$$P(T > 5) = \int_5^\infty \frac{1}{7/6} e^{-\frac{t}{7/6}} dt = 0/52$$

در حالت دوم نیز، بنا به ویژگی فقدان حافظه توزیع نمایی، احتمال موردنظر برابر ۰/۵۲ می‌شود.

رابطه بین توزیع‌های پواسن و نمایی

هر دو توزیع پواسون و نمایی به رخدادهایی مربوط هستند که به وسیله فرآیند پواسون به وجود می‌آیند و لذا



شکل ۷.۳ رابطه بین توزیع‌های پواسون و نمایی

متغیرتصادفی گسسته X: تعداد رخدادها در هر فاصله

ارتباط خاصی با هم دارند. به این صورت که در فرآیند پواسون، مدت زمان بین هر دو رخداد متوالی توزیع نمایی دارد. پارامتر این توزیع نمایی همان پارامتر فرآیند پواسون مربوط به آن است.

برای اثبات این نکته، فرض کنید T فاصله زمانی بین دو رخداد در یک فرآیند پواسون با پارامتر λ باشد، آنگاه پیشامد $\{T > t\}$ معادل است با اینکه در فاصله‌ای به طول t هیچ پیشامدی رخ ندهد. با توجه به اینکه $N(t)$ یعنی تعداد رخدادها در فاصله زمانی t، توزیع پواسون با پارامتر λt دارد، داریم

$$P(T > t) = P(N(t) = 0) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

پس

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$\lambda = \frac{1}{4}$

که تابع توزیع نمایی با پارامتر λ است.

$\frac{1}{\lambda} = 4$

مثال ۷.۳ تعداد حوادثی که در یک کارخانه در هر ماه رخ می‌دهد، توزیع پواسون با میانگین ۴ دارد.

توزیع نمایی

الف) توزیع مدت زمان بین هر دو حادثه را بنویسید.

ب) امروز حادثه‌ای رخ داده است. احتمال آنکه دست‌کم تا ۱۰ روز دیگر حادثه‌ای رخ ندهد، چقدر است؟

پ) چنانچه از هفته پیش تاکنون حادثه‌ای رخ نداده باشد، احتمال آنکه دست‌کم تا ۱۰ روز دیگر حادثه‌ای رخ ندهد چقدر است؟

حل: الف) با توجه به بحث بالا، T: "فاصله زمانی بین هر دو حادثه"، توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = 4$

$P(x>a) = 1 - F_x(a) = e^{-\lambda a}$

تابع چگالی $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \;,\; t>0$

دارد، یعنی

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad , \quad t \geq 0$$

ب)

توزیع نمایی با پارامتر $\frac{۴}{۳}$ — در ۱۰ روز حادثه ای رخ ندهد

$$P(T > ۱۰) = ۱ - F_T(\frac{۱۰}{۳۰}) = e^{-۴ \times \frac{۱۰}{۳۰}} = ۰/۲۶$$

پ) با توجه به ویژگی فقدان حافظه توزیع نمایی، احتمال این حالت دقیقاً همان مقدار به دست آمده در (ب) است.

اصلا مهم نیست حادثه رخ داده یا نداده، چون نمایی فاقد حافظه ام

توزیع نمایی حالت خاصی از یک توزیع کلی‌تر به نام توزیع گاما می‌باشد. قبل از تعریف توزیع گاما، یادآوری می‌شویم که تابع گاما به صورت زیر تعریف می‌شود. (طرح تحقیقی ۳.۳ را ببینید.)

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \;,\; \alpha > ۰$$

تعریف ۸.۳ چنانچه متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال به صورت زیر باشد

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad , \quad x \geq ۰ \;.\; \alpha, \beta > ۰$$

تابع چگالی گاما

$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$

$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx$

گوییم X توزیع گاما با پارامترهای α و β دارد و می‌نویسیم $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$.

می‌توان ثابت کرد که اگر $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$، آنگاه $E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$ و $V(X) = \frac{\alpha}{\beta^۲}$. واضح است که اگر در توزیع گاما قرار دهیم $\alpha = ۱$، توزیع گاما به توزیع نمایی تبدیل می‌شود.

شکل ۸.۳ نمودار تابع چگالی احتمال گاما برای چند α و β

در دو صفحه پیش گفته شد که در یک فرآیند پواسون با پارامتر λ، زمان انتظار تا اولین رخداد (و به طور کلی فاصله زمانی بین هر دو رخداد متوالی) توزیع نمایی دارد. می‌توان نشان داد که زمان انتظار تا

nامین رخداد (و کلاً فاصله زمانی بین هر ۱ + n رخداد متوالی) توزیع گاما با پارامترهای n و λ دارد. لذا متغیر تصادفی گاما را می‌توان به عنوان متغیر تصادفی زمان انتظار پیوسته تصور کرد، هنگامی که شخص باید تا nامین رخداد منتظر بماند. یادآوری می‌کنیم که توزیع‌های هندسی و دوجمله‌ای منفی توزیع‌های زمان انتظار گسسته بودند. بر پایه‌ی آنچه گفته شد، نتیجه زیر را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

اگر $X_۱, \cdots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هریک با توزیع نمایی با پارامتر λ باشند، آنگاه متغیر تصادفی $T(X) = \sum_{i=۱}^{n} X_i$ توزیع گاما با پارامترهای (n, λ) دارد.

مثال ۸.۳ یک سیستم دارای ۴ ژنراتور است که طول عمر هریک، مستقل از دیگری، نمایی با میانگین ۲۰۰ ساعت است. سیستم با یک ژنراتور شروع به کار می‌کند و پس از پایان زمان کارکرد ژنراتور اول، از ژنراتور دوم و همین‌طور تا ژنراتور چهارم استفاده می‌کند. طول عمر سیستم چه توزیعی دارد؟ میانگین طول عمر سیستم چقدر است؟ احتمال آنکه سیستم دست‌کم ۷۰۰ ساعت فعال باشد، چقدر است؟

$\frac{1}{\lambda} = ۲۰۰$

$\lambda = \frac{1}{۲۰۰}$

حل: طول عمر سیستم، T، توزیع گاما با پارامترهای $(۴, \frac{۱}{۲۰۰})$ دارد. یعنی

$$f(t) = \frac{(\frac{۱}{۲۰۰})^۴}{\Gamma(۴)} x^۳ e^{-\frac{x}{۲۰۰}} = \frac{۱}{۶ \times (۲۰۰)^۴} x^۳ e^{-\frac{x}{۲۰۰}} \quad x > ۰$$

$T(x) = \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx$

امید ریاضی طول عمر سیستم برابر $\frac{\alpha}{\beta} = ۸۰۰$ ساعت است. به علاوه

$$P(T \geq ۷۰۰) = \int_{۷۰۰}^{\infty} \frac{۱}{۶ \times (۲۰۰)^۴} x^۳ e^{-\frac{x}{۲۰۰}} dx = ۰/۶۲$$

۵.۳ توزیع ویبول

در بخش پیش گفتیم که توزیع نمایی، تحت شرایطی یک مدل مناسب برای توزیع‌های زمان انتظار و طول عمر می‌باشد. با وجود این در بسیاری اوقات الگوی زمان انتظار یا طول عمر منطبق بر یک مدل نمایی نیست. مثلاً ویژگی فقدان حافظه در بسیاری از مدل‌های طول عمر برقرار نمی‌باشد. یک الگوی کلی‌تر و منعطف‌تر برای مدل‌بندی زمان انتظار و طول عمر، توزیع ویبول است.

تعریف ۹.۳ چنانچه متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال به صورت زیر باشد

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha\beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^{\alpha}} \quad x \geq ۰ \quad \alpha, \beta > ۰$$

گوییم X توزیع ویبول با پارامترهای α و β دارد و می‌نویسیم $X \sim W(\alpha, \beta)$.

$f(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$

در حالت خاص $\lambda = \beta$ و $\alpha = ۱$ الگوی فوق به توزیع نمایی تبدیل می‌شود. همچنین به ازای $\alpha = ۲$، حالتی که کاربردهای ویژه‌ای دارد، توزیع فوق به توزیع رایلی موسوم است.

ثابت می‌شود که امید ریاضی و واریانس توزیع ویبول عبارت‌اند از

نورم

$$E(X) = (\frac{۱}{\beta})^{\frac{۱}{\alpha}}\Gamma(۱+\frac{۱}{\alpha})$$

$$V(X) = (\frac{۱}{\beta})^{\frac{۲}{\alpha}}\{\Gamma(۱+\frac{۲}{\alpha}) - [\Gamma(۱+\frac{۱}{\alpha})]^۲\}$$

مثال ۹.۳ طول عمر یک قطعه الکترونیکی (X به هزار ساعت) توزیع رایلی با $\beta = \frac{۱}{۵۰۰}$ دارد.

الف) احتمال اینکه قطعه‌ای از این نوع بیش از ۳۰ (هزار ساعت) عمر کند چقدر است؟ متوسط طول عمر این نوع قطعات چقدر است؟

ب) هزینه ساخت هر قطعه ۳ (هزار تومان) و درآمد حاصل از فروش هر قطعه ۴ (هزار تومان) است. شرکت تولیدی این قطعات تضمین کرده است که چنانچه یک قطعه کمتر از ۱۰ (هزار ساعت) عمر کند، به جای آن و حداکثر یک‌بار قطعه جدیدی رایگان تحویل داده می‌شود. متوسط سود شرکت در هر قطعه چقدر است؟

حل: الف) تابع چگالی احتمال X به صورت زیر است

$$f(x) = \frac{۱}{۲۵۰}xe^{-\frac{۱}{۵۰۰}x^۲} \quad , \quad x \geq ۰ \qquad ۱$$

بنابراین

$$P(X > ۳۰) = \int_{۳۰}^{\infty} \frac{۱}{۲۵۰}xe^{-\frac{۱}{۵۰۰}x^۲}dx = ۰/۱۶۵ \qquad ۱/۵ \qquad \Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}$$

یعنی از هر ۱۰۰۰ قطعه، تعداد ۱۶۵ قطعه طول عمر بیش از ۳۰ (هزار ساعت) دارند. همچنین

$$E(X) = (\frac{۱}{\beta})^{\frac{۱}{\alpha}}\Gamma(۱+\frac{۱}{\alpha}) = (۵۰۰)^{\frac{۱}{۲}}\Gamma(۱/۵) = (۵۰۰)^{\frac{۱}{۲}}\frac{\sqrt{\pi}}{۲} = \cancel{۳۹/۶۳} \; ۱۹/۸۱ \qquad ۱/۵$$

یعنی این قطعات به طور متوسط ۳۹/۶۳ (هزار ساعت) عمر می‌کنند.

ب) معادله بین هزینه و درآمد و سود در هر قطعه عبارت است از ۹

F(سود خالص) $= P$(درآمد حاصل از فروش) $- C$(هزینه) ۱/۵

که در اینجا $\lambda = \theta$ است. فرض کنید T بیانگر طول عمر یک قطعه (به هزار ساعت) باشد، آنگاه

$$C = \begin{cases} ۶ & T < ۱۰ \\ ۳ & T \geq ۱۰ \end{cases} \qquad ۱/۵$$

و لذا

$$E(C) = ۶ \times P(T < ۱۰) + ۳P(T \geq ۱۰) = ۳P(T < ۱۰) + ۳ = ۳/۵۴۴ \qquad ۴/۵$$

بنابراین

$$۴ - ۳/۵۴۴ = ۰/۴۵۶$$

$$E(F) = E(P) - E(C) = ۳/۵۴۴ - ۳ = ۰/۵۴۴ \text{ (هزار تومان)} \qquad ۱/۵$$

۶.۳ توزیع نرمال

توزیع نرمال نقش اساسی و گسترده‌ای در آمار نظری و آمار کاربردی دارد. این توزیع مدل مناسبی برای بسیاری از پدیده‌های واقعی و متغیرهای طبیعی است. نام نرمال نیز از همین نکته گرفته شده است. مباحث مربوط به توزیع نرمال بسیار است. در این بخش تنها آنچه که در سطح کتاب حاضر لازم داریم گفته می‌شود. در فصول بعد که همواره نام توزیع نرمال به چشم می‌خورد، خواهیم دید که این توزیع در استنباطهای آماری نیز نقش اساسی دارد.

تعریف ۱۰.۳ چنانچه متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال به صورت زیر باشد

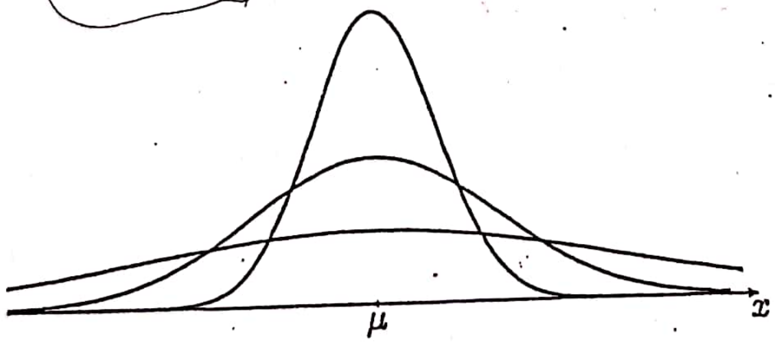
میانگین

تابع چگالی

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$$

واریانس

گوییم X توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 دارد و می‌نویسیم $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.



شکل ۹.۳ نمودار چند تابع چگالی احتمال نرمال

میانگین و واریانس‌ها

چند نکته درباره‌ی توزیع نرمال

میانگین و واریانس: می‌توان ثابت کرد که در توزیع نرمال، $\boxed{E(X) = \mu \text{ و } V(X) = \sigma^2}$ (به عنوان تمرین این دو رابطه را ثابت کنید). به همین دلیل است که برای نشان دادن پارامترهای توزیع نرمال معمولاً از نمادهای μ و σ^2 استفاده می‌شود.

شکل تابع چگالی: نمودار تابع چگالی احتمال نرمال، زنگدیس و حول خط $x = \mu$ (میانگین) متقارن است. به دلیل تقارن، میانه توزیع نیز همین نقطه است. با مشتق‌گیری معلوم می‌شود که $f(x)$ به ازای μ ماکزیمم است (از روی شکل نیز این نکته آشکار است). لذا در توزیع نرمال، میانگین و میانه و نما منطبق برهم‌اند. پارامتر σ تغییرپذیری توزیع را نشان می‌دهد. هرچه σ کوچکتر باشد توزیع فشرده‌تر و نمودار آن برجسته‌تر است.

الگویی برای متغیرهای طبیعی: بسیاری از متغیرهای طبیعی، دست‌کم به طور تقریب، از یک توزیع نرمال پیروی می‌کنند. برای مثال قد افراد در یک سن خاص، مقاومت کششی میله‌های آهن یک خط تولید، خطاهای اندازه‌گیری یک کمیت فیزیکی، رشد نوعی گیاه در یک فاصله زمانی، وزن شمش‌های تولیدی یک کارخانه، تقریباً توزیع نرمال (با μ و σ^2 مناسب) دارند.

در اینجا یک نکته شایان یادآوری است. همچنان‌که شکلهای ۹.۳ نشان می‌دهند، در توزیع نرمال تقریباً تمام احتمال در دامنه‌ای محدود حول میانگین واقع است. به طوری که احتمال مشاهده‌ای خارج از این دامنه عملاً صفر است. به این دلیل می‌توان توزیع نرمال را در مدل‌سازی مشاهدات مربوط به متغیرهای تصادفی کراندار، مانند آنهایی که مثال زدیم، نیز به کار برد.

توزیع نرمال استاندارد: استفاده از توزیع نرمال به طور مستقیم دشوار است. زیرا محاسبه احتمال‌های مربوط به این توزیع مستلزم محاسبه انتگرالها به روش‌های عددی است. برای پرهیز از این دشواری از حالت خاصی از توزیع نرمال به نام توزیع نرمال استاندارد استفاده می‌شود.

نخست اشاره می‌کنیم که می‌توان ثابت کرد اگر متغیر تصادفی X توزیع نرمال با میانگین μ و واریان
$P(-$
داشته باشد، آنگاه متغیر تصادفی $aX + b$ توزیع نرمال با میانگین $a\mu + b$ و واریانس $^2\sigma^2$
مطلب نتیجه می‌شود که متغیر تصادفی $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ توزیع نرمال با میانگین صفر و وا

وی فرقی ندارد.

$E(Z) = 0$

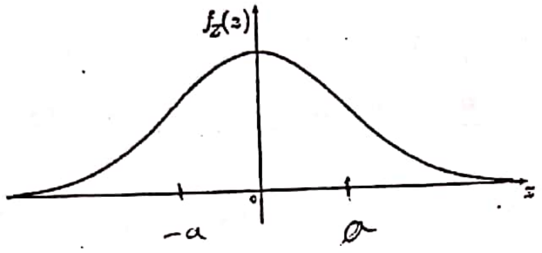
$var(Z) = 1$

$var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} var($

σ^2

این توزیع را نرمال استاندارد می‌نامند. پس تابع چگالی احتمال نرمال استاندارد عبارت است از

$$f_Z(z) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{z^۲}{۲}} \quad . \quad -\infty < z < \infty$$



شکل ۱۰.۳ نمودار تابع چگالی احتمال نرمال استاندارد

در عمل هر عبارت احتمالی مربوط به یک توزیع نرمال دلخواه را به عبارتی برحسب توزیع نرمال استاندارد تبدیل می‌کنیم. سپس این احتمال را از جدول نرمال استاندارد به دست می‌آوریم. جدول ۳ انتهای کتاب احتمال‌های تجمعی $P(Z \leq z)$ را به ازای مقادیر مختلف z ارائه می‌دهد. هر درایه جدول برای مقدار مفروض z، که حاصل تلاقی سطر و ستون متناظر است، مقدار $P(Z \leq z)$ را می‌دهد. این احتمال تجمعی با مساحت سایه‌خورده در شکل بالای جدول نمایش داده شده است. برای نمونه

./۴۵۸۷

$$P(Z \leq ۱/۵۲) = ۰/۹۳۵۷$$

$$P(Z \leq -۰/۳۹) = ۰/۳۴۸۳ = P(z \geq ./۳۹) = ۱ - P(z < ./۳۹)$$

$$P(Z > ۰/۲۵) = ۱ - P(Z \leq ۰/۲۵) = ۱ - ۰/۵۹۸۷ = ۰/۴۰۱۳ \rightarrow ۱ - P(z < ./۲۱)$$

$$P(-۰/۳۱ < Z < ۰/۷۹) = P(Z < ۰/۷۹) - P(Z \leq -۰/۳۱)$$

$$= ۰/۷۸۵۲ - ۰/۳۷۸۳ = ۰/۴۰۶۹$$

توجه دارید که Z متغیر تصادفی پیوسته است و لذا در داخل عبارات فوق، بودن یا نبودن مساوی فرقی ندارد. دیگر اینکه با توجه به تقارن توزیع نرمال استاندارد حول صفر، داریم

$$P(Z \leq -z) = ۱ - P(Z \leq z)$$

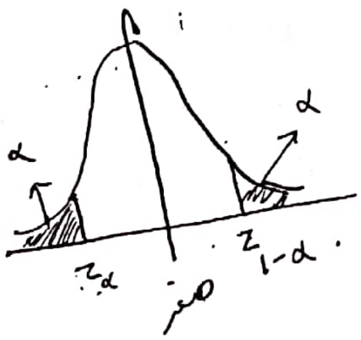
مثال ۱۰.۳ فرض کنید متغیر تصادفی X توزیع نرمال با میانگین $\mu = ۱۵$ و واریانس $\sigma^۲ = ۱۲$ دارد. مطلوب است

الف) $P(X < ۱۰)$ ب) $P(X > ۱۶)$ پ) $P(۱۲ < X < ۲۰)$

حل: در هر مورد احتمال مربوطه را به احتمالی برحسب توزیع نرمال استاندارد تبدیل می‌کنیم. برای این‌کار عبارت داخل هر پرانتز را استاندارد می‌کنیم. به علاوه چون جدول انتهای کتاب احتمال‌های تجمعی تا هر نقطه را می‌دهد لذا عبارت‌های مربوط به (ب) و (پ) را تبدیل به عبارت‌هایی به صورت کوچکتری درمی‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
P(X < ۱۰) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{۱۰-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{۱۰-۱۵}{\sqrt{۱۲}}\right) \\
&= P(Z < -۱/۴۴) = ۰/۰۷۴۹ \qquad 1 - P(Z < 1/44) \\
P(X > ۱۶) &= ۱ - P(X \le ۱۶) = ۱ - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{۱۶-\mu}{\sigma}\right) \\
&= ۱ - P(Z \le ۰/۲۹) = ۱ - ۰/۶۱۴۱ = ۰/۳۸۵۹ \\
P(۱۲ < X < ۲۰) &= P(X < ۲۰) - P(X \le ۱۲) \\
&= P(Z < ۱/۴۴) - P(Z \le -۰/۸۷) \\
&= ۰/۹۲۵۱ - ۰/۱۹۲۲ = ۰/۷۳۲۹
\end{aligned}
$$

صدک‌های توزیع نرمال: صدک αام توزیع نرمال استاندارد را با Z_α نشان می‌دهیم. مقدار Z_α عددی روی محور Z هاست که احتمال تجمعی تا آن نقطه برابر α می‌باشد. یعنی $P(Z \le z_\alpha) = \alpha$. بنا به تقارن توزیع داریم: $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$. برای نمونه چند صدک عبارت‌اند از



$z_{۰/۶۷} = ۰/۴۴$ $\quad z_{۰/۹۵} = ۱/۶۵$

$z_{۰/۹۰} = ۱/۲۸$ $\quad z_{۰/۹۷۵} = ۱/۹۶$

در آینده از صدک‌های توزیع نرمال استاندارد بسیار استفاده خواهیم کرد.

مثال ۱۱.۳ میزان رشد یک نوع نهال طی یک ماه، متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۱۵ سانتیمتر و انحراف معیار ۱/۲ سانتیمتر است. احتمال اینکه نهالی از این نوع طی یک ماه بیش از ۱۷ سانتیمتر رشد کند چقدر است؟ این احتمال در عمل به چه معناست؟ ۹۰% نهال‌ها دست‌کم چه رشدی دارند؟

حداکثر

حل: داریم $X \sim N(۱۵,(۱/۲)^۲)$، پس

$$\begin{aligned} P(X > ۱۷) &= ۱ - P(X \leq ۱۷) \\ &= ۱ - P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{۱۷-\mu}{\sigma}) = ۱ - P(Z \leq \frac{۱۷-۱۵}{۱/۲}) \\ &= ۱ - P(Z \leq ۱/۶۷) = ۱ - ۰/۹۵۲۵ = ۰/۰۴۷۵ \end{aligned}$$

مقدار ۰/۰۴۷۵ به این معناست که حدوداً ۵ درصد از نهال‌ها طی یک ماه بیش از ۱۷ سانتیمتر رشد می‌کنند. برای صدک نودم باید داشته باشیم $P(X \leq x) = ۰/۹۰$، یعنی

$$P(Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}) = ۰/۹۰ \qquad P(Z < ۱/۲۸) = ۰/۹$$

پس باید $\frac{x-\mu}{\sigma}$ برابر $Z_{۰/۹۰}$ باشد. طبق جدول $z_{۰/۹۰} = ۱/۲۸$ و لذا $\frac{x-۱۵}{۱/۲} = ۱/۲۸$. بنابراین $x = ۱۶/۵۴$، که یعنی ۹۰ درصد نهال‌ها حداکثر ۱۶/۵۴ سانتیمتر و ۱۰ درصد بقیه بیش از این مقدار رشد می‌کنند.

مثال ۱۲.۳ یک دستگاه برای ساخت بلبرینگ‌هایی به قطر ۱/۲۵ سانتیمتر تنظیم شده است. در عمل قطر بلبرینگ‌های تولید شده، میانگین ۱/۲۳۷ و انحراف معیار ۰/۰۰۸ دارند. اگر فرض نرمال بودن تقریبی قطرها را بپذیریم و اگر بلبرینگ‌هایی پذیرفتنی باشند که قطرشان درون فاصله $۱/۲۵ \pm ۰/۰۲$ سانتیمتر قرار دارند،

محصول پذیرش $(۱/۲۳ , ۱/۲۷)$

الف) چه نسبتی از محصولات، پذیرفتنی‌اند؟

ب) چنانچه بتوان فرآیند تولید را به گونه‌ای بهبود بخشید که انحراف معیار قطرها به ۰/۰۰۶ کاهش یابد و یا اینکه قطر بلبرینگ‌ها ۱/۲۴۲ سانتیمتر شود، کدام روش درصد محصولات پذیرفتنی را بیشتر می‌کند؟

حل:

$$\underbrace{۱/۲۵ - ۰/۰۲}_{۱/۲۳} < X < \underbrace{۱/۲۵ + ۰/۰۲}_{۱/۲۷}$$

$$\begin{aligned} & P(۱/۲۵ - ۰/۰۲ < X < ۱/۲۵ + ۰/۰۲) \\ &= P(X < ۱/۲۷) - P(X \leq ۱/۲۳) \\ &= P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{۱/۲۷ - ۱/۲۳۷}{۰/۰۰۸}) - P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{۱/۲۳ - ۱/۲۳۷}{۰/۰۰۸}) \\ &= P(Z < ۴/۱۲۵) - P(Z \leq -۰/۸۷۵) \\ &= ۱ - ۰/۱۹۲۲ = ۰/۸۰۷۸ \end{aligned}$$

بنابراین حدود ۰/۸۱ از بلبرینگ‌ها دارای قطر قابل‌قبول هستند.

ب) چنانچه انحراف معیار قطرها به ۰/۰۰۶ کاهش یابد، آنگاه

$$\begin{aligned} & P(۱/۲۳ < X < ۱/۲۷) \\ = \; & P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{۱/۲۷ - ۱/۲۳۷}{۰/۰۰۶}) - P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{۱/۲۳ - ۱/۲۳۷}{۰/۰۰۶}) \\ = \; & P(Z < ۵/۵) - P(Z \leq -۱/۱۷) \\ = \; & ۱ - ۰/۱۲۱۰ = ۰/۸۷۹۰ \end{aligned}$$

د.ش

از طرفی اگر میانگین قطر بلبرینگ‌ها ۱/۲۴۲ شود، آنگاه

$$\begin{aligned} & P(۱/۲۳ < X < ۱/۲۷) \\ = \; & P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{۱/۲۷ - ۱/۲۴۲}{۰/۰۰۸}) - P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{۱/۲۳ - ۱/۲۴۲}{۰/۰۰۸}) \\ = \; & P(Z < ۳/۵) - P(Z \leq -۱/۵) \\ = \; & ۱ - ۰/۰۶۶۸ = ۰/۹۳۳۲ \end{aligned}$$

بنابراین اصلاح خط تولید به قسمی که میانگین قطر بلبرینگ‌ها ۱/۲۴۲ شود، درصد بلبرینگ‌های قابل‌قبول را بیشتر می‌کند.

تقریب نرمال برای توزیع دوجمله‌ای

در این قسمت یک کاربرد مهم و جالب از توزیع نرمال را بیان می‌کنیم. همان گونه که در بخش ۶.۲ ملاحظه نمودید، محاسبه احتمال‌های توزیع دوجمله‌ای هنگامی‌که n بزرگ باشد، دشوار است. ثابت می‌شود که اگر X یک متغیر تصادفی با توزیع دوجمله‌ای $b(n, p)$ باشد آنگاه متغیر تصادفی $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{np(۱-p)}}$ دارای توزیع حدی نرمال استاندارد است. به عبارت دیگر برای nهای بزرگ، متغیر تصادفی X، تقریباً دارای توزیع نرمال $N(np, np(۱-p))$ است. این نکته ما را قادر می‌سازد که برای nهای بزرگ، احتمال‌های توزیع دوجمله‌ای را با احتمال‌های توزیع نرمال تقریب بزنیم. این تقریب هنگامی‌که $np \geq ۵$ و $n(۱-p) \geq ۵$ عملاً مناسب است. استفاده از تقریب نرمال که یک توزیع پیوسته است به جای دوجمله‌ای که یک توزیع گسسته است، متضمن استفاده از دستورالعملی به نام تصحیح پیوستگی است. در مثال زیر این دستور به کار گرفته شده است.

مثال ۱۳.۳ احتمال اینکه محموله‌ای با تأخیر ارسال شود $p = ۰/۱۲$ است. احتمال آنرا بیابید که در نمونه‌ای ۶۵تایی، حداکثر ۸ محموله با تأخیر ارسال شود. احتمال آنرا بیابید که دست‌کم ۱۰ نمونه با تأخیر ارسال شود.

حل: چون $np = ۶۵ \times ۰/۱۲ \doteq ۷/۸$ و $np(۱-p) = ۶۵ \times ۰/۸۸ = ۵۷/۲$ هردو از ۵ بزرگتر هستند لذا از تقریب نرمال می‌توان استفاده کرد. اگر تعداد محموله‌های با تأخیر در ۶۵ نمونه را با X نشان دهیم، آنگاه $X \sim b(۶۵, ۰/۱۲)$ و

$np(1-p) = ۶۵ \times \frac{۱۲}{۱۰۰} \times \frac{۸۸}{۱۰۰}$

$$P(X \leq ۸) = P\left(Z \leq \frac{۸/۵ - np}{\sqrt{np(۱-p)}}\right)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{۸/۵ - ۷/۸}{\sqrt{۶/۸۶۴}}\right) = P(Z \leq ۰/۲۷) = ۰/۶۰۶۴$$

$$P(X \geq ۱۰) = ۱ - P(X < ۱۰) = ۱ - P(X \leq ۹) \simeq ۱ - P\left(Z \leq \frac{۹/۵ - ۷/۸}{\sqrt{۶/۸۶۴}}\right)$$

$$= ۱ - ۰/۷۴۲۲ = ۰/۲۵۷۸$$

در اینجا استفاده از ۸/۵ به جای ۸، و نیز ۹/۵ به جای ۹، را تصحیح پیوستگی گوییم. این عمل باعث می‌شود تقریب‌ها به مقدار واقعی نزدیکتر شوند.

تقریب پواسن بوسیله نرمال :

اگر بخواهیم $F(x)$ را با داشتن $f(x)$ بیابیم: $F_X(x)=\int f(t)dt$

و برعکس

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x)$$

تمرین‌های فصل سوم

۱.۳. تابع چگالی متغیر تصادفی X: "مقاومت برشی نقطه جوش" مربوط به یک فلز خاص عبارت است از

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{250000} & 0\le x\le 500\\[2mm] \dfrac{1000-x}{250000} & 500< x\le 1000\\[2mm] 0 & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

$\int_{-\infty}^{a}$

الف) تابع توزیع X را بیابید. $\to F$

ب) اعداد a و b را بیابید طوری که در روابط $P(X\le a)=0/50$ و $P(X\le b)=0/95$ صدق کنند. تعبیر a و b از لحاظ عملی چیست؟

۵۰۰

صدک ۹۵ام توزیع

۲.۳ تابع توزیع متغیر تصادفی X به صورت زیر است

$$F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{16}{x^2} & x>4\\[2mm] 0 & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

الف) $P(X\le 7)$، $P(X>5)$ و $P(5<X\le 6)$ را بیابید.

ب) تابع چگالی احتمال X را بیابید و توضیح دهید چگونه می‌توان بر پایه‌ی آن احتمال‌های بند الف را حساب کرد.

پ) نمودارهای تابع توزیع و تابع چگالی احتمال X را رسم کنید.

ت) $E(X)$ و $V(X)$ را به دست آورید.

۳.۳ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی T به صورت زیر است

$$f(t)=\begin{cases}kte^{-t^2} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$$

الف) توضیح دهید که توزیع فوق عضو چه خانواده‌ای از توزیع‌هاست و چه نام دارد.

ب) مقدار k را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

پ) تابع توزیع T را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

ت) $E(T)$ و $V(T)$ و میانه‌ی T را حساب کنید.

۴.۳ اگر Z متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد باشد، پیدا کنید احتمال اینکه این متغیر مقداری

الف) بزرگتر از ۰/۴۲- اختیار کند،

ب) بین ۰/۵۸ و ۱/۲۲ اختیار کند.

۵.۳ مقدار z را بیابید اگر مساحت زیر منحنی توزیع نرمال استاندارد

الف) بین ۰ و z، برابر ۰/۳۲۶۴ باشد،

ب) در چپ z، برابر ۰/۰۷۲۲ باشد،

پ) بین $-z$ و z، برابر ۰/۸۵۰۲ باشد.

۶.۳ اگر Z متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد باشد، مطلوبست مقادیر z_1 و z_2 و z_3 به قسمی که

الف) $P(Z \geq z_1) = ۰/۷۰۸۸$،

ب) $P(Z > z_2) = ۰/۷۰۸۸$،

پ) $P(-z_3 \leq Z < z_3) = ۰/۹۷۰۰$.

۷.۳ متغیری تصادفی توزیع نرمال با $\sigma = ۱۰$ دارد. احتمال اینکه این متغیر تصادفی مقداری کمتر از ۸۱ اختیار کند برابر ۰/۸۲۱۲ است. احتمال اینکه مقداری بزرگتر از ۵۹/۲ اختیار کند چقدر است؟

۸.۳ بنا به قانون ماکسول-بولتسمان در فیزیک، چگالی احتمال V، سرعت یک مولکول گاز، به صورت زیر است

$$f(v) = \begin{cases} kv^2e^{-\beta v^2} & v > 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

که در آن β به جرم مولکول و دمای مطلق بستگی دارد، و k ثابت خاصی است. نشان دهید که انرژی جنبشی، $E = \frac{1}{2}mV^2$، متغیری تصادفی با توزیع گاما است.

۹.۳ یک موشک زمین به زمین از سایت موشکی به سمت هدف پرتاب می‌شود. چنانچه خطای افقی و عمودی محل برخورد موشک تا هدف، برحسب ۱۰۰ متر در صفحه مختصات دکارتی، دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع نرمال استاندارد باشند، مطلوب است احتمال اینکه موشک حداکثر در شعاع ۱۵۰۰ متری هدف اصابت کند.

۱۰.۳ فرض کنید طول عمر یک چیپ در یک برد کامپیوتری، برحسب سال، متغیر تصادفی X با تابع

چگالی زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

احتمال اینکه از ۸ چیپ از این نوع، دست‌کم ۴ عدد چیپ بیش از ۱۰ سال عمر کنند، چقدر است؟

۱۱.۳ در یک جنگل تعداد درختانی که در ناحیه‌ای به مساحت R روئیده‌اند دارای توزیع پواسن با میانگین λR است، که در آن λ یک عدد مثبت است. میانگین فاصله یک درخت از نزدیکترین درخت مجاور آن چقدر است؟

۱۲.۳ در یک کارخانه تعداد حوادث متغیر تصادفی پواسن با نرخ ۳ حادثه در ماه است. مطلوب است احتمال اینکه زمان بین حادثه‌ای که امروز رخ داده است تا دو حادثه بعد (حادثه سوم) حداقل ۲۰ روز باشد.

۱۳.۳ تعداد ذرات β منتشر شده از یک گرم ماده رادیواکتیو در فاصله زمانی $[0, t]$ برابر $N(t)$ است. بنا به روابط و شرایط حاکم بر انتشار ذرات می‌پذیریم که $N(t)$ دارای توزیع پواسن است. چنانچه به طور متوسط در هر ثانیه از یک گرم ماده رادیواکتیو ۴ ذره β منتشر شود، احتمال آن را بیابید که برای انتشار دو ذره β حداقل ۲ ثانیه وقت لازم باشد.

۱۴.۳ برای نقشه‌برداری در یک زمین دایره شکل، سه نقطه M و N و L را به تصادف و مستقل از هم بر محیط این زمین اختیار می‌کنیم. احتمال اینکه کمان MNL کمتر از 90° باشد چقدر است؟

۱۵.۳ فرض کنید ۴٪ گلگیرهای موتورسیکلت که با استفاده از نوارهای فولادی به وسیله دستگاهی پرس می‌شوند نیاز به صافکاری دارند. احتمال اینکه از ۱۵ گلگیر که بعداً بوسیله این دستگاه پرس می‌شوند ۲ گلگیر، و از ۲۰ عدد گلگیری که کلاً توسط این دستگاه پرس می‌شوند ۳ گلگیر نیاز به صافکاری داشته باشند، چقدر است؟

۱۶.۳ طول عمر یک قطعه مکانیکی در موتور هواپیمای بوئینگ ۷۴۷ دارای توزیع نمایی با میانگین ۲۴۸ روز می‌باشد. زمان تعویض قطعه را پس از چند روز اعلام کنیم تا با احتمال ۹۵٪ هواپیما تا آخرین روز پرواز خود یا این قطعه دچار از کار افتادن قطعه موردنظر نشود؟

۱۷.۳ وزن گوشت‌های کنسرو شده به صورت نرمال با میانگین ۴/۱۵ کیلوگرم و انحراف معیار ۰/۱۲ کیلوگرم توزیع شده است. وزنی که روی جعبه کنسرو ثبت شده است ۴ کیلوگرم است. کدام یک از دو

اصلاح زیر در فرآیند کنسرو کردن، به تقلیل بیشتر در نسبت قوطی‌هایی که وزنی کمتر از وزن اعلام شده دارند منجر خواهد شد؟ (۱) افزایش وزن میانگین فرآیند به ۴/۲۰ کیلوگرم، ضمن ثابت نگهداشتن انحراف معیار. (۲) کاهش انحراف معیار فرآیند به ۰/۱۰ کیلوگرم ضمن ثابت نگهداشتن میانگین.

۱۸.۳ طول یک رشته نایلن که تا پارگی کشیده می‌شود، یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین ۵۰ متر است. ۱۰ رشته از این نوع نایلن بررسی می‌شوند. احتمال اینکه دست‌کم ۸ رشته بیش از ۶۰ متر کشیده شوند چقدر است؟

۱۹.۳ توزیع وزن یک نوع خاص از پوشاک، نرمال با انحراف معیار ۶ گرم است. طبق قواعد استاندارد، نباید بیش از ۱ درصد پوشاک تولید شده دارای وزن کمتر از ۲۱۳ گرم باشند.

الف) میانگین وزن پوشاک تولید شده چه اندازه باید باشد؟

ب) چنانچه تولید پوشاک با وزن متوسط محاسبه شده در بند الف انجام شود، چه نسبتی از تولید دارای وزن بین ۲۱۸ تا ۲۳۴ گرم خواهند بود؟

طرح‌های تحقیقی فصل سوم

۱.۳ فرض کنید زمان کارکرد یک قطعه، متغیر تصادفی T با تابع چگالی احتمال $f(t)$ و تابع توزیع $F(t)$ باشد. در این صورت تابع نرخ شکست به صورت زیر تعریف می‌شود

چگالی

$$Z(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

به سخن دیگر نرخ شکست در زمان t، چگالی احتمال از کار افتادگی به ازای t است به فرض آنکه از کار افتادگی قبل از زمان t رخ نداده باشد.

الف) نشان دهید که اگر T توزیع نمایی داشته باشد، نرخ شکست مقداری ثابت است.

ب) نشان دهید که اگر T توزیع ویبول داشته باشد، تابع نرخ شکست عبارت است از

$$Z(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$$

۲.۳ زمان وقوع اولین از کار افتادگی (به سال) برای نوعی رله توزیع ویبول با پارامترهای $\alpha = ۱۰$ و $\beta = ۰/۵$ می‌باشد.

الف) توضیح دهید آنچه گفته شد عملاً به چه معنی است؟

ب) احتمال آنکه یک رله از نوع بالا دست‌کم ۵ سال بدون از کار افتادن دوام بیاورد، چقدر است؟

پ) اگر رله‌ای از نوع بالا ۵ سال بدون از کار افتادن دوام آورده باشد، احتمال آنکه دست‌کم ۵ سال دیگر هم دوام بیاورد چقدر است؟

ت) تابع نرخ شکست را برای توزیع فوق بیابید. نمودار آن را رسم کنید. رفتار تابع نرخ شکست را توضیح دهید.

۳.۳ الف) با انتگرال‌گیری جزء به جزء نشان دهید که به ازای $\alpha > ۱$،

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - ۱)\Gamma(\alpha - ۱)$$

ب) با تغییر متغیر مناسبی نشان دهید که می‌توان انتگرالی که تابع گاما را تعریف می‌کند به صورت زیر نوشت

$$\Gamma(\alpha) = ۲^{۱-\alpha} \int_۰^\infty z^{۲\alpha-۱} e^{-\frac{۱}{۲}z^۲} dz \quad \alpha > ۰$$

پ) بر پایه‌ی بند ب نتیجه بگیرید که

$$\Gamma(\tfrac{۱}{۲}) = \sqrt{۲} \int_۰^\infty e^{-\frac{۱}{۲}z^۲} dz$$

و از آن، و با استفاده از تبدیل انتگرال فوق به یک انتگرال دوگانه در مختصات قطبی، ثابت کنید که $\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}$.

۴.۳ ثابت کنید تنها توزیع پیوسته فاقد حافظه، توزیع نمایی است.

۵.۳ عمر مفید (برحسب ساعت) یک نوع لامپ مهتابی متغیری تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر است

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{k}{(t+۱۰۰)^۳} & t > ۰ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

الف) مقدار k را بیابید.

ب) میانگین و میانه عمر مفید را بیابید و تعبیر کنید.

پ) صدک ۹۵ام توزیع عمر مفید را به دست آورید و تعبیر کنید.

ت) تابع توزیع T را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

ث) ۱۰ لامپ از نوع فوق را آزمایش می‌کنیم. احتمال آن که دست‌کم ۸ تای آن‌ها بیش از ۱۰۰ ساعت عمر کنند، چقدر است؟

ج) در بند ث، احتمال آن که ۵ لامپ بیش از ۱۵۰ ساعت و ۵ لامپ کمتر از ۱۵۰ ساعت عمر مفید کنند، چقدر است؟

چ) یک لامپ از نوع فوق را استفاده می‌کنیم. این لامپ تا ۱۵۰ ساعت پس از آغاز استفاده، همچنان روشن مانده است. احتمال اینکه دست‌کم ۵۰ ساعت دیگر نیز روشن بماند، چقدر است؟

۶.۳ فرض کنید X نشان دهنده میزان تقاضای سالانه (بر حسب کیلو) برای یک نوع بذر در یک روستا، و $f(x)$ تابع چگالی احتمال X باشد. فروشگاه روستا در ابتدای سال مقدار C کیلو بذر سفارش می‌دهد. قیمت خرید هر کیلو بذر $d_۱$ ریال است، و فروشگاه هر کیلو بذر را با قیمت $d_۲$ ریال می‌فروشد. این بذر اگر مدت زیادی نگهداری شود فاسد می‌شود. لذا مقدار فروش نرفته، در پایان سال فاقد مشتری است و دور ریخته می‌شود.

الف) فرض کنید مقدار فروش را، که یک متغیر تصادفی است، با S نشان دهیم. ثابت کنید

$$E(S) = \int_۰^C xf(x)dx + c[۱ - F(c)]$$

ب) ثابت کنید مقدار c که میانگین سود خالص را بیشینه می‌کند، صدک $\frac{d_۲ - d_۱}{d_۲}$ام توزیع X است.

پ) اگر $d_1 = ۶۰۰$ و $d_2 = ۱۱۰۰$ و $X \sim U(۹۰۰۰, ۱۲۰۰۰)$، انتخاب بهینه را برای C بیابید.

ت) بند پ را با فرض این که X توزیع نرمال با میانگین ۱۰۰۰۰ کیلو و انحراف معیار ۳۰۰ کیلو داشته باشد، تکرار کنید.

فصل ۴

توزیع‌های چندمتغیره

در بسیاری از مسائل، لازم است که چند متغیر تصادفی را همزمان با هم مورد مطالعه قرار دهیم. برای این منظور باید متغیرهای تصادفی، تابع احتمال و تابع توزیع احتمال و دیگر مفاهیم مربوطه را به حالت چند متغیره گسترش دهیم. فصل حاضر اختصاص به این کار دارد.

با توزیع‌های دو متغیره گسسته آغاز و آنگاه توزیع‌های دو متغیره پیوسته را معرفی می‌کنیم. سپس توزیع‌های شرطی، امید ریاضی و واریانس شرطی، و مفاهیم استقلال و وابستگی را تعریف و تشریح می‌کنیم. سرانجام مباحث فوق را به حالت چند متغیره تعمیم می‌دهیم.

۱.۴ توزیع‌های دومتغیره

در این بخش تعاریف مربوط به متغیرهای تصادفی، تابع احتمال و تابع توزیع احتمال را به حالت دو متغیره گسترش می‌دهیم. نخست حالت گسسته را بیان می‌کنیم. فرض کنید S یک فضای نمونه، و X و Y دو متغیر تصادفی گسسته بر S باشند.

تعریف ۱.۴ تابع احتمال توأم دو متغیر تصادفی گسسته X و Y عبارت است از

$$P_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

که بیان می‌کند

الف) متغیرهای تصادفی X و Y، هرکدام، چه مقادیری را اختیار می‌کنند، و

ب) هر زوج مقدار (x,y) با چه احتمالی رخ می‌دهد.

شرایط زیر در مورد هر تابع احتمال توأم برقرار است

$$۱)\quad 0 \leq P_{X,Y}(x,y) \leq 1 \quad , \quad \forall x,y$$

$$۲)\quad \sum_x \sum_y P_{X,Y}(x,y) = 1$$

احتمال هر پیشامد مانند A را می‌توان از رابطه $P[(X,Y) \in A] = \sum_{(x,y)\in A} \sum P_{X,Y}(x,y)$ به دست آورد.

مثال ۱.۴ هیأت مدیره یک شرکت شامل ۵ کارشناس ارشد، ۳ کارشناس و ۲ تکنسین است. برای عضویت در کمیته بازرسی ۳ نفر به تصادف انتخاب می‌شوند. متغیرهای تصادفی X: "تعداد کارشناسان در کمیته" و Y: "تعداد تکنسین‌ها در کمیته" را در نظر بگیرید. تابع احتمال توأم X و Y را بیابید.

حل: در اینجا X می‌تواند مقادیر ۰، ۱، ۲ و ۳، و Y می‌تواند مقادیر ۰، ۱ و ۲ را بپذیرد. باید احتمال‌های مربوط به هر زوج (x,y) را محاسبه کنیم. برای نمونه

$$P_{X,Y}(0,0) = P(X=0, Y=0) = \frac{\binom{5}{3}\binom{3}{0}\binom{2}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{120}$$

$$P_{X,Y}(1,2) = P(X=1, Y=2) = \frac{\binom{5}{0}\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{120}$$

پس از محاسبه تمام حالت‌ها، جدول زیر یعنی جدول تابع احتمال توأم X و Y به دست می‌آید

$Y\backslash X$	۰	۱	۲	۳	$P(Y=y)$
۰	$\frac{10}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{15}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{56}{120}$
۱	$\frac{20}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{6}{120}$	۰	$\frac{56}{120}$
۲	$\frac{5}{120}$	$\frac{3}{120}$	۰	۰	$\frac{8}{120}$
$P(X=x)$	$\frac{35}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{1}{120}$	۱

توابع احتمال حاشیه‌ای

با مشخص بودن تابع احتمال توأم، می‌توان تابع احتمال هریک از متغیرها را به دست آورد.

تعریف ۲.۴ دو تابع زیر را به ترتیب تابع احتمال حاشیه‌ای X و تابع احتمال حاشیه‌ای Y می‌نامیم

$$P_X(x) = P(X=x) = \sum_y P(X=x, Y=y)$$

$$P_Y(x) = P(Y=y) = \sum_x P(X=x, Y=y)$$

پس مقادیر توابع احتمال حاشیه‌ای حاصل جمع‌های سطرها و ستون‌های جدول احتمال توأم هستند. نوشتن این مقادیر در حواشی این جدول‌ها، منشأ اصطلاح تابع احتمال حاشیه‌ای (کناری) است.

مثال ۲.۴ در مثال قبل، توابع احتمال حاشیه‌ای X و Y را بیابید.

حل: با توجه به تعریف ۲.۴، داریم

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{35}{120} & x=0\\ \frac{63}{120} & x=1\\ \frac{21}{120} & x=2\\ \frac{1}{120} & x=3\end{cases}\qquad P(Y=y)=\begin{cases}\frac{56}{120} & y=0\\ \frac{56}{120} & y=1\\ \frac{8}{120} & y=2\end{cases}$$

توزیع‌های دومتغیره پیوسته

اکنون به معرفی و تشریح توزیع‌های توأم پیوسته (برای حالت دومتغیره) می‌پردازیم. یادآور می‌شویم که اگر $S_{X,Y}$ یعنی مجموعه مقادیر دو متغیر تصادفی X و Y یک پیوستار دوبعدی باشد، آنگاه گوییم X و Y توأماً پیوسته‌اند. در این حالت نمی‌توان مانند حالت گسسته (تعریف ۱.۴) احتمال‌ها را به نقاط واقع در پیوستار انتساب داد. به جای آن، مقادیر احتمال را به زیرمجموعه‌های پیوستار نسبت می‌دهیم. تابعی که این نوع انتساب را برقرار می‌کند، تابع چگالی احتمال توأم X و Y نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۴ تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی پیوسته X و Y تابعی نامنفی مانند $f_{X,Y}(x,y)$ است، به طوری که برای هر زیرمجموعه A از R^2 داشته باشیم

$$P((X,Y)\in A)=\int\int_A f_{X,Y}(x,y)dxdy \tag{۱.۴}$$

مقدار $f(x,y)$ چگالی احتمال در نقطه (x,y) نامیده می‌شود.

چند نکته

۱ـ اگر $A=S_{(X,Y)}$، آنگاه $P((X,Y)\in A)=1$، لذا $\int\int_{S_{X,Y}} f(x,y)dxdy=1$. چون احتمال قرار گرفتن (X,Y) خارج از $S_{X,Y}$ صفر است، رابطه اخیر گاهی به صورت $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$ نوشته می‌شود.

۲ـ چنانچه $A=[a,b]\times[c,d]$، آنگاه به دست می‌آوریم

$$P[a\leq X\leq b\ ,\ c\leq Y\leq d]=\int_c^d\int_a^b f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

۳ـ از لحاظ هندسی، حجم زیررویه $z = f(x,y)$، متناظر با هر بازه مستطیلی، برابر با احتمال این است که (X,Y) مقداری در این بازه اختیار کنند. واضح است که کل حجم زیررویه برای هر تابع چگالی احتمال دومتغیره برابر با یک است.

۴ـ چگالی احتمال دومتغیره را می‌توان با چگالی جرم اجسام مسطح در فیزیک مقایسه کرد. هر جسم مسطح دارای یک تابع چگالی جرم است که نشان می‌دهد چگالی جرم در هر نقطه از آن جسم چه مقدار است. چگالی جرم در هر نقطه از جسم مثبت است، اما صحبت از وزن جسم در یک نقطه خاص، بی‌معنی است. البته هر قطعه از جسم دارای وزن خاصی می‌باشد که می‌توان آن را بر پایه تابع چگالی جرم محاسبه کرد. به همین ترتیب درباره تابع چگالی احتمال می‌توان گفت که چگالی احتمال در هر نقطه (x,y) مثبت است، گرچه احتمال در هر نقطه صفر است. از طرف دیگر هر مجموعه مانند A دارای احتمال خاصی است که می‌توان آن را بر پایه‌ی تابع چگالی احتمال، طبق رابطه (۱.۴) محاسبه کرد.

تعریف ۴.۴ تابع توزیع (تجمعی) توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \ , \ Y \leq y) \quad , \quad (x,y) \in R^{۲}$$

با توجه به تعریف تابع چگالی احتمال، واضح است که

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(t,s)dtds$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^{۲}}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$$

تابع $F_{X,Y}(x,y)$ برحسب هر متغیر صعودی است. رویه $z = F_{X,Y}(x,y)$ هموار است. به علاوه برای هر x و y، داریم $F_{X,Y}(x,-\infty) = F_{X,Y}(-\infty,y) = ۰$ و $F_{X,Y}(+\infty,+\infty) = ۱$.

تذکر. از این پس، به جز در موارد خاص، از نوشتن اندیس‌های X و Y در تابع احتمال، تابع چگالی احتمال و تابع توزیع احتمال دو متغیره چشم‌پوشی می‌کنیم و می‌نویسیم: $P(x,y)$، $f(x,y)$ و $F(x,y)$.

مثال ۳.۴ انبساط سطحی (X) و اسیدیته (Y) نوعی ترکیب شیمیایی، دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر می‌باشند.

$$f(x,y) = \begin{cases} k(۳ - x - y) & ۰ \leq x \leq ۱ \ , \ ۰ \leq y \leq ۲ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف) مقدار k را بیابید.

ب) احتمال آنکه در یک ترکیب از نوع فوق، انبساط سطحی بیش از ۰/۵ و اسیدیته بیش از ۱ باشد چقدر است؟

پ) تابع توزیع توأم X و Y را بیابید.

حل: الف) باید مقدار $\int_0^2 \int_0^1 k(3-x-y)dxdy$ برابر یک باشد، که از آن $k = \frac{1}{4}$ به دست می‌آید.

ب)

$$P(X > 0/5\,,\, Y > 1) = \int_1^2 \int_{0/5}^1 \frac{1}{3}(3-x-y)dxdy = 0/125$$

پ) برای $1 \leq x \leq 0$ و $2 \leq y \leq 0$ داریم

$$F(x,y) = \int_0^y \int_0^x \frac{1}{3}(3-t-s)dtds = xy - \frac{1}{6}(xy^2 + x^2y)$$

برای حالت $1 < x$ و $2 > y > 0$ داریم

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^y \int_0^1 \frac{1}{3}(3-t-s)dtds \\ &= \frac{1}{6}y(5-y) \end{aligned}$$

سرانجام، برای حالت $1 > x > 0$ و $2 < y$ داریم

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^2 \int_0^x \frac{1}{3}(3-t-s)dtds \\ &= \frac{1}{3}x(4-x) \end{aligned}$$

پس

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ یا } y < 0 \\ xy - \frac{1}{6}(xy^2 + x^2y) & 0 \leq x \leq 1\,,\, 0 \leq y \leq 2 \\ \frac{1}{6}y(5-y) & 1 < x\,,\, 0 \leq y \leq 2 \\ \frac{1}{3}x(4-x) & 0 \leq x \leq 1\,,\, 2 < y \\ 1 & x \geq 1\,,\, y \geq 2 \end{cases}$$

توابع چگالی حاشیه‌ای

با معلوم بودن تابع چگالی احتمال توأم، می‌توان تابع چگالی احتمال هریک از متغیرها را به دست آورد.

تعریف ۴.۵ اگر $f(x,y)$ تابع چگالی احتمال توأم X و Y باشد، آنگاه دو تابع زیر را به ترتیب تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای Y می‌نامیم

$$f_X(x)=\int_y f(x,y)dy \quad , \quad f_Y(y)=\int_x f(x,y)dx$$

مثال ۴.۴ در مثال قبل، توابع احتمال حاشیه‌ای X و Y را بیابید.

حل:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^2 \frac{1}{3}(3-x-y)dy=\frac{2}{3}(2-x) \ , \quad 0\le x\le 1 \\ f_Y(y) &= \int_0^1 \frac{1}{3}(3-x-y)dx=\frac{1}{6}(5-2y) \ . \quad 0\le y\le 2 \end{aligned}$$

بر اساس دو تابع فوق می‌توان احتمال پیشامدهایی را که فقط مربوط به انبساط سطحی یا فقط مربوط به اسیدیته می‌باشند، محاسبه کرد.

۴.۲ امید ریاضی

همچنان که قبلاً گفتیم، امید ریاضی و واریانس معیارهای متداول برای بررسی مرکزیت و پراکندگی یک متغیر تصادفی هستند. اکنون این مفاهیم را به حالت دو متغیره تعمیم می‌دهیم. علاوه بر اینها، در این حالت نیازمند معیارهایی برای بررسی ارتباط بین دو متغیر تصادفی هستیم. تعریف زیر تمام حالت‌های مورد نیاز را دربردارد.

تعریف ۴.۶ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی گسسته (پیوسته) با تابع احتمال توأم $P(x,y)$ (تابع چگالی احتمال توأم $f(x,y)$) باشند. امید ریاضی تابع $g(X,Y)$ از این دو متغیر، در صورت وجود، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Eg(X,Y)=\begin{cases} \sum_x\sum_y g(x,y)P(x,y) & \text{در حالت گسسته} \\ \int_y\int_x g(x,y)f(x,y)dxdy & \text{در حالت پیوسته} \end{cases}$$

نکته ۱ تعریف بالا در دو حالت خاص $g(X,Y)=X$ و $g(X,Y)=Y$ منطبق با تعریف امید ریاضی یک متغیر تصادفی می‌شود. به طور کلی اگر g صرفاً تابعی از X (Y) باشد، آنگاه امید ریاضی g را می‌توان با استفاده از تابع حاشیه‌ای X (Y) محاسبه کرد.

نکته ۲ به طور مشابه با حالت یک متغیره، واریانس متغیر تصادفی X به صورت $E(X-\mu_X)^2$ تعریف

می‌شود، که با توجه به نکته ۱ می‌توان آن را با استفاده از توزیع حاشیه‌ای X محاسبه کرد. به همین ترتیب می‌توان واریانس Y را محاسبه نمود.

مثال ۵.۴ در مثال ۱.۴، انتظار می‌رود چند نفر کارشناس و تکنسین در کمیته انتخابی قرار گیرند؟

حل: کافی است $E(X+Y)$ را محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2}(x+y)P(x,y) \\ &= (0+0)\times\frac{10}{120}+(0+1)\times\frac{20}{120}+\cdots+(2+2)\times 0 \\ &= \frac{180}{120}=1/5 \end{aligned}$$

مثال ۶.۴ در مثال ۳.۴، الف) امید ریاضی انبساط سطحی، ب) امید ریاضی حاصل‌ضرب انبساط سطحی و اسیدیته را محاسبه کنید.

حل: الف) طبق تعریف، $E(X)$ از رابطه زیر به دست می‌آید

$$E(X)=\int_y\int_x \frac{1}{3}x(3-x-y)dxdy$$

اما با توجه به نکته ۱ می‌توان برای محاسبه $E(X)$ از تابع چگالی حاشیه‌ای X استفاده کرد. بدین ترتیب با محاسبات کمتری روبرو هستیم:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_x xf_X(x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3}x(2-x)dx=\frac{4}{9} \end{aligned}$$

ب) در این حالت $g(X,Y)=XY$ تابعی از هر دو متغیر X و Y است. لذا، برخلاف حالت الف، باید مستقیماً از تعریف ۶.۴ استفاده کنیم:

$$E(XY)=\int_0^2\int_0^1 \frac{1}{3}xy(3-x-y)dxdy=\frac{1}{3}$$

در گزاره زیر، که اثبات آن به عنوان تمرین واگذار می‌شود، نتیجه‌ای ارائه شده است که محاسبه برخی از امید ریاضی‌ها را آسان‌تر می‌کند.

گزاره ۱.۴ اگر $g_1(X,Y)$ و $g_2(X,Y)$ توابعی از دو متغیر تصادفی X و Y باشند، آنگاه

$$E[c_1g_1(X,Y)+c_2g_2(X,Y)]=c_1Eg_1(X,Y)+c_2Eg_2(X,Y)$$

و در حالت خاص

$$E[g_1(X) + g_2(Y)] = Eg_1(X) + Eg_2(Y)$$

توجه کنید که، عطف به نکته ۱، به طور کلی می‌توان عبارت اخیر را با دانستن فقط دو تابع حاشیه‌ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ محاسبه کرد و نیازی به دانستن توزیع توأم X و Y نیست. این نکته فقط در مورد توابع جمعی مناسب است و نه در مورد توابع ضربی. به سخن دیگر، در حالت کلی

$$E[g_1(X)g_2(Y)] \neq E[g_1(X)]E[g_2(Y)]$$

۳.۴ کوواریانس و همبستگی

در حالتی که دو متغیر تصادفی را مطالعه می‌کنیم، هر چند امید ریاضی‌ها و واریانس‌ها اطلاعات مفیدی درباره‌ی هریک از متغیرها ارائه می‌دهند، اما در این حالت‌ها نیاز به معیارهایی برای بررسی ارتباط و وابستگی دو متغیر داریم. در این باره دو معیار به نام‌های کوواریانس و ضریب همبستگی معرفی می‌کنیم. مبنای کار تعریف ۶.۴ است.

تعریف ۷.۴ کوواریانس دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y)] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

هرگاه، به طور متوسط، تغییرات X و تغییرات Y هم جهت باشند آنگاه کوواریانس X و Y مثبت خواهد بود. اما اگر، به طور متوسط، با افزایش X، Y کاهش یابد (یا بر عکس) آنگاه کوواریانس منفی خواهد بود. اگر دانستن اینکه X بزرگ یا کوچک است اطلاع چندانی درباره مقدار Y ندهد، کوواریانس به صفر نزدیک خواهد بود. در حالتی که کوواریانس X و Y برابر صفر باشد گوییم X و Y نا همبسته‌اند.

با همه اینها کوواریانس به مقیاس اندازه‌گیری بستگی دارد. برای مثال اگر X و Y بر حسب سانتیمتر اندازه‌گیری شوند، آنگاه کوواریانس X و Y، ۱۰۰۰۰ برابر هنگامی خواهد بود که این دو متغیر بر حسب متر اندازه‌گیری شوند. برای به دست آوردن معیاری برای همبستگی که این عیب را نداشته باشد، از ضریب همبستگی استفاده می‌شود که حاصل تقسیم کوواریانس بر انحراف معیار X و انحراف معیار Y است.

تعریف ۸.۴ ضریب همبستگی خطی بین دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\cdot V(Y)}} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

ضریب همبستگی خطی (از این پس به کوتاهی: ضریب همبستگی) معیاری بدون واحد است و همان‌طور که در طرح تحقیقی ۳.۴ خواسته شده است در رابطه $-1 \leq \rho \leq 1$ صدق می‌کند. مثبت (منفی) بودن ρ به این معنی است که جهت تغییرات X و Y مستقیم (معکوس) است. هرچه ρ به مقدار ۱ یا ۱ـ (صفر) نزدیکتر باشد، همبستگی و ارتباط خطی بین دو متغیر قوی‌تر (ضعیف‌تر) است. چنانچه $\rho = 1$ یا $\rho = -1$، ارتباط خطی دقیق بین دو متغیر وجود دارد. به این معنی که با اتخاذ a و b مناسب می‌توان نوشت $Y = a + bX$.

مثال ۷.۴ توزیع احتمال توأم تعداد نقص‌های حاصل از وجود حباب هوا (X) و تعداد نقص‌های ناشی از وجود ذرات خارجی (Y) در شیشه بطری‌های تولیدی یک کارخانه به صورت زیر است

$Y\backslash X$	۰	۱	۲	$P(Y=y)$
۰	۰/۲	۰/۱	۰/۱	۰/۴
۱	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۶
$P(X=x)$	۰/۳	۰/۳	۰/۴	۱

کوواریانس و ضریب همبستگی خطی بین X و Y را بیابید.

حل: نخست $E(X)$ و $E(Y)$ و $E(XY)$ را محاسبه می‌کنیم تا بر پایه‌ی آنها کوواریانس را بیابیم.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_x xP_X(X=x) = (۰\times ۰/۳)+(۱\times ۰/۳)+(۲\times ۰/۴) = ۱/۱\\
E(Y) &= \sum_y yP_Y(Y=y) = (۰\times ۰/۴)+(۱\times ۰/۶) = ۰/۶\\
E(XY) &= \sum_x\sum_y xyP(x,y) = (۰\times ۰\times ۰/۲)+\cdots+(۲\times ۱\times ۰/۳) = ۰/۸\\
Cov(X,Y) &= E(XY)-E(X)E(Y) = ۰/۸-(۱/۱\times ۰/۶) = ۰/۱۴
\end{aligned}$$

برای محاسبه ρ نیاز به انحراف معیارها داریم. نخست $E(X^۲)$ و $E(Y^۲)$ را می‌یابیم.

$$E(X^۲) = \sum_x x^۲P_X(X=x) = (۰\times ۰/۳)+(۱\times ۰/۳)+(۴\times ۰/۴) = ۱/۹$$

$$E(Y^2) = \sum_y y^2 P_Y(Y=y) = (0 \times 0/4) + (1 \times 0/6) = 0/6$$
$$\sigma_X = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)} = \sqrt{1/9 - (1/1)^2} = 0/83$$
$$\sigma_Y = \sqrt{E(Y^2) - E^2(Y)} = \sqrt{0/6 - (0/6)^2} = 0/49$$

پس

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0/14}{0/83 \times 0/49} = 0/34$$

مقدار ۰/۳۴ برای ضریب همبستگی خطی بدین معنی است که بین تعداد نقص‌های حاصل از حباب هوا و تعداد نقص‌های ناشی از وجود ذرات خارجی ارتباط مستقیم خطی و البته نسبتاً ضعیفی وجود دارد.

مثال ۸.۴ تابع چگالی احتمال توأم بهای یک کالا (P: برحسب هزار تومان)، و فروش کل (S: برحسب ده هزار واحد) به صورت زیر است

$$f_{P,S}(p,s) = \frac{1}{20} p e^{-\frac{1}{10}ps} \quad 2 < p < 4 \ , \ s \geq 0$$

کوواریانس و ضریب همبستگی خطی بین بهای کالا و فروش کل را بیابید.

حل: باید $E(P)$، $E(S)$، $E(PS)$، $V(P)$ و $V(S)$ را محاسبه کنیم.

$$E(P) = \int_0^\infty \int_2^4 p \times \frac{1}{20} p e^{-\frac{1}{10}ps} dp ds = 3$$
$$E(S) = \int_0^\infty \int_2^4 s \times \frac{1}{20} p e^{-\frac{1}{10}ps} dp ds = 3/47$$
$$E(P^2) = \int_0^\infty \int_2^4 p^2 \times \frac{1}{20} p e^{-\frac{1}{10}ps} dp ds = 9/33$$
$$E(S^2) = \int_0^\infty \int_2^4 s^2 \times \frac{1}{20} p e^{-\frac{1}{10}ps} dp ds = 25$$
$$E(PS) = \int_0^\infty \int_2^4 ps \times \frac{1}{20} p e^{-\frac{1}{10}ps} dp ds = 10$$

لذا

$$V(P) = E(P^2) - E^2(P) = 0/33$$
$$V(S) = E(S^2) - E^2(S) = 12/96$$

بنابراین

$$Cov(P,S) = E(PS) - E(P)E(S) = -۰/۴۱$$

$$\rho_{P,S} = \frac{\sigma_{P,S}}{\sigma_P \sigma_S} = \frac{-۰/۴۱}{\sqrt{۰/۳۳}\sqrt{۱۲/۹۶}} = -۰/۲۰$$

مقدار $\rho_{P,S} = -۰/۲۰$ بدین معنی است که در الگوی فوق بین بهای کالا و فروش کل ارتباط خطی معکوس و ضعیفی وجود دارد.

در پایان این بخش گزاره زیر را که ویژگی‌هایی درباره امید ریاضی و واریانس و کوواریانس به دست می‌دهد، ارائه می‌کنیم.

گزاره ۲.۴ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی، و a و b و c و d اعداد دلخواه باشند، آنگاه

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

$$V(aX + bY) = a^۲V(X) + b^۲V(Y) + ۲acCov(X,Y)$$

$$Cov(aX + b, cY + d) = Cov(aX, cY) = acCov(X,Y)$$

کاربردهایی از این روابط در تمرین‌های ۱.۴، ۲.۴ و ۵.۴ و طرح تحقیقی ۲.۴ داده شده است. شایسته است خواننده درستی روابط فوق را تحقیق کند و درباره‌ی تعبیر این روابط بحث کند. دقت کنید که رابطه اول حالت خاصی از گزاره ۱.۴ است که برای مقایسه با رابطه واریانس، دوباره ذکر شده است.

۴.۴ توزیع‌های شرطی

گاهی می‌خواهیم احتمال‌های مربوط به یک متغیر را تحت حالت‌های خاصی از متغیر دیگر بررسی کنیم. در این موارد، توزیع شرطی الگوی مورد نظر را فراهم می‌سازد.

تعریف ۹.۴ الف) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی گسسته باشند، آنگاه تابع احتمال شرطی X، با فرض $Y = y$، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$P_{X|Y}(x|Y=y) = \frac{P(x,y)}{P_Y(y)} \quad , \quad P_Y(y) > ۰$$

ب) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته باشند. آنگاه تابع چگالی احتمال شرطی X، با فرض $Y = y$، به صورت زیر تعریف تعریف می‌شود

$$f_{X|Y}(x|Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \quad , \quad f_Y(y) > ۰$$

توابع $P_{Y|X}(y|X = x)$ و $f_{Y|X}(Y|X = x)$ نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند.
دقت کنید که $P_{X|Y}(x|Y = y)$ خود یک تابع احتمال است، همچنین $f_{X|Y}(x|Y = y)$ نیز یک تابع چگالی احتمال می‌باشد. بنابراین برای هر y خاص داریم

$$\sum_x P_{X|Y}(x|Y = y) = 1 \quad , \quad \int_x f_{X|Y}(x|Y = y)dx = 1$$

بر پایه‌ی توزیع‌های شرطی می‌توانیم امیدهای شرطی را تعریف کنیم.

تعریف ۴.۱۰ فرض کنید $g(X)$ تابعی از X باشد. آنگاه امید شرطی $g(X)$ با فرض $Y = y$ برابر است با

$$E[g(X)|Y = y] = \begin{cases} \sum_x g(x)P(x|Y = y) & \text{حالت گسسته} \\ \int_x g(x)f(x|Y = y)dx & \text{حالت پیوسته} \end{cases}$$

امید شرطی $g(Y)$ به شرط $X = x$ نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

اگر در تعریف بالا قرار دهیم $g(X) = X$، میانگین شرطی متغیر تصادفی X به شرط $Y = y$ به دست می‌آید. واریانس شرطی X به شرط $Y = y$ نیز برابر است با

$$\begin{aligned} V(X|Y = y) &= E[(X - E(X|y))|y] \\ &= E(X^2|y) - E^2(X|y) \end{aligned}$$

مثال ۴.۹ در مثال ۴.۷ تابع احتمال شرطی X را با فرض $Y = 0$ بیابید، و $E(X|Y = 0)$ را به دست آورید.

حل: تابع احتمال خاشیه‌ای Y در کنار جدول درج شده است. بر پایه‌ی آن داریم

$$\begin{aligned} P_{X|Y}(x|Y = 0) &= \frac{P_{X|Y}(x, 0)}{P_Y(0)} = \frac{P_{X|Y}(x, 0)}{0/4} \\ &= \begin{cases} 0/5 & x = 0 \\ 0/25 & x = 1, 2 \end{cases} \end{aligned}$$

برای نمونه، مقدار $P_{X|Y}(2|Y = 0) = 0/25$ به این معنی است که: چنانچه یک بطری فاقد ذره خارجی باشد، آنگاه احتمال اینکه دو نقص ناشی از حباب هوا داشته باشد ۰/۲۵ است. برای محاسبه امید

ریاضی شرطی داریم

$$E(X|Y=\text{۰}) = \sum_x xP_{X|Y}(x|Y=\text{۰}) = (\text{۰}\times \text{۰/۵}) + (\text{۱}\times \text{۰/۲۵}) + (\text{۲}\times \text{۰/۲۵}) = \text{۰/۷۵}$$

مقدار فوق بدین معنی است که چنانچه متوجه شویم یک بطری فاقد ذره خارجی باشد، آنگاه انتظار داریم تعداد نقص‌های حاصل از وجود حباب هوا در آن بطری برابر ۰/۷۵ باشد. به سخن دیگر متوسط تعداد نقص‌های حاصل از وجود حباب هوا در بطری‌هایی که فاقد ذره خارجی هستند، ۰/۷۵ است.

مثال ۱۰.۴ تابع چگالی توأم بهای کالا و فروش کل را در مثال ۸.۴ در نظر بگیرید.

الف) تابع چگالی احتمال شرطی فروش کل را، چنانچه بهای کالا ۳ (هزار تومان) باشد، بیابید.

ب) چنانچه بهای واحد کالا ۳ (هزار تومان) باشد، انتظار می‌رود مقدار فروش چقدر باشد؟

حل: الف) برای $f(s|P=p)$ نخست لازم است که تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای P یعنی $f_P(p)$ را بیابیم.

$$f_P(p) = \int_{\text{۰}}^{\infty} \frac{\text{۱}}{\text{۲۰}} pe^{-\frac{\text{۱}}{\text{۱۰}}ps} ds = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \qquad \text{۲} < p < \text{۴}$$

بنابراین

$$f(s|P=p) = \frac{f(p,s)}{f_P(p)} = \frac{\text{۱}}{\text{۱۰}} pe^{-\frac{\text{۱}}{\text{۱۰}}ps} \qquad s \geq \text{۰}$$

و لذا

$$f(s|P=\text{۳}) = \text{۰/۳}e^{-\text{۰/۳}s} \qquad s \geq \text{۰}$$

ب)

$$E(S|P=\text{۳}) = \int_{\text{۰}}^{\infty} sf(s|p=\text{۳})ds = \int_{\text{۰}}^{\infty} \text{۰/۳}se^{-\text{۰/۳}s}ds = \frac{\text{۱۰}}{\text{۳}} \simeq \text{۳/۳۳}$$

متغیرهای تصادفی مستقل

یکی از مهمترین مفاهیم در نظریه احتمال، و همچنین در مباحث نظری و کاربردی آمار، مفهوم متغیرهای تصادفی مستقل است. همان طور که در زیر نشان داده خواهد شد، مفهوم استقلال برای متغیرهای تصادفی تعمیمی از مفهوم استقلال برای پیشامدهاست.

تعریف ۱۱.۴ الف) دو متغیر تصادفی گسسته X و Y را مستقل (به سخن دقیق‌تر: مستقل از هم) نامیم اگر

$$P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)P_Y(y) \quad \forall(x,y)$$

ب) دو متغیر تصادفی پیوسته X و Y را مستقل نامیم اگر

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \forall(x,y)$$

نکته ۳ استقلال X و Y ایجاب می‌کند که تابع احتمال توأم یا تابع چگالی توأم X و Y به حاصل ضرب توابع حاشیه‌ای تجزیه شود. بنابراین، اگر X و Y مستقل باشند، دانستن توابع احتمال یا توابع چگالی احتمال تک تک آنها در حکم دانستن توزیع توأم آنها است، در حالی که این وضع در حالت کلی برقرار نیست (تمرین ۴.۴ را ببینید.)

نکته ۴ در بعضی از کتاب‌ها، گزاره زیر به عنوان تعریف دو متغیر تصادفی مستقل بیان می‌شود

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) \quad \forall A, B$$

که در آن A زیرمجموعه‌ای دلخواه از برد X، و B زیرمجموعه‌ای دلخواه از برد Y است. می‌توان ثابت کرد که این گزاره معادل با تعریف ۱۱.۴ است. در واقع این گزاره به وجه بهتری مبین این حقیقت است که مفهوم متغیرهای تصادفی مستقل تعمیمی از مفهوم پیشامدهای مستقل است. خواننده به خاطر می‌آورد که، طبق تعریف ۳.۱، دو پیشامد A و B را مستقل گوییم اگر $P(A \cap B) = P(A)P(B)$، رابطه‌ای که بسیار شبیه رابطه بالا است.

مثال ۱۱.۴ در مثال ۷.۴ بررسی کنید که آیا X و Y مستقل هستند؟

حل: شرط استقلال X و Y آن است که برای همه زوج مقادیر (x,y) داشته باشیم

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

اما، برای نمونه،

$$P(X = ۰, Y = ۰) = ۰/۲ \neq P(X = ۰)P(Y = ۰) = ۰/۴ \times ۰/۳ = ۰/۱۲$$

و همین یک مورد کافی است که نتیجه بگیریم X و Y مستقل نیستند.

مثال ۱۲.۴ در مثال ۳.۴ بررسی کنید که آیا X: مقدار انبساط سطحی، و Y: مقدار اسیدیته ترکیب

شیمیایی، متغیرهای تصادفی مستقل هستند؟

حل: با توجه به توابع چگالی حاشیه‌ای X و Y که در مثال ۴.۴ به دست آوردیم، یعنی

$$f_X(x) = \frac{۲}{۳}(۲ - x) \ , \quad ۰ \leq x \leq ۱$$
$$f_Y(y) = \frac{۱}{۶}(۵ - ۲y) \ , \quad ۰ \leq y < ۲$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{۱}{۳}(۳ - x - y) \neq f_X(x) f_Y(y)$$

پس X و Y مستقل نیستند.

مثال ۱۳.۴ تابع چگالی احتمال زمان کارکرد دو مقاومت که در یک دستگاه الکترونیکی نصب شده‌اند، به صورت زیر است

$$f_{T_۱,T_۲}(t_۱, t_۲) = \frac{۱}{۷۰۰} e^{-(\frac{t_۱}{۲۰} + \frac{t_۲}{۳۵})} \quad t_۱, t_۲ > ۰$$

بررسی کنید که آیا زمان‌های کارکرد دو مقاومت، $T_۱$ و $T_۲$، مستقل‌اند؟

حل: نخست توابع چگالی حاشیه‌ای $T_۱$ و $T_۲$ را می‌یابیم

$$\begin{aligned} f_{T_۱}(t_۱) &= \int_۰^\infty \frac{۱}{۷۰۰}(e^{-(\frac{t_۱}{۲۰} + \frac{t_۲}{۳۵})} dt_۲ \\ &= \frac{۱}{۲۰} e^{-\frac{t_۱}{۲۰}} \quad t_۱ > ۰ \\ f_{T_۲}(t_۲) &= \int_۰^\infty \frac{۱}{۷۰۰}(e^{-(\frac{t_۱}{۲۰} + \frac{t_۲}{۳۵})} dt_۱ \\ &= \frac{۱}{۳۵} e^{-\frac{t_۲}{۳۵}} \quad t_۲ > ۰ \end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر $(t_۱, t_۲)$ داریم

$$f_{T_۱,T_۲}(t_۱, t_۲) = f_{T_۱}(t_۱) f_{T_۲}(t_۲)$$

پس $T_۱$ و $T_۲$ مستقل از هم‌اند.

نکته ۵ مثال بالا از این جهت بیان شد که تشریح شود که چگونه استقلال دو متغیر تصادفی را بررسی کنیم. بدین ترتیب که توزیع توأم دو متغیر تصادفی X و Y داده می‌شود و آنگاه برای بررسی استقلال X و Y، توزیع‌های حاشیه‌ای را می‌یابیم و شرط استقلال را بررسی می‌کنیم. اما در عمل، گاهی وضعیت برعکس است. به این صورت که با توجه به شرایط فیزیکی و یا سایر ملاحظات می‌توان فرض استقلال دو

متغیر تصادفی را پذیرفت و بر این اساس توزیع توأم را به صورت حاصل‌ضرب حاشیه‌ای‌ها نوشت و در محاسبات استفاده کرد. مثال زیر نمونه‌ای از این وضعیت است.

مثال ۱۴.۴ دو ترانزیستور A و B دارای طول عمرهایی با توزیع نمایی، به ترتیب، با میانگین ۱۰۰ و ۱۲۰ ساعت هستند. ترانزیستور A را به کار می‌گیریم و پس از اینکه از کار افتاد ترانزیستور B را مورد استفاده قرار می‌دهیم. احتمال اینکه بتوانیم دست کم ۲۵۰ ساعت از این دو ترانزیستور استفاده کنیم، چقدر است؟

حل: طول عمر ترانزیستور A را با متغیر تصادفی X، و از آن B را با Y نشان می‌دهیم. باید مقدار $P(X+Y \geq ۲۵۰)$ را بر پایه تابع چگالی احتمال توأم X و Y بیابیم. اما بنا به استقلال X و Y، چگالی توأم X و Y برابر با حاصل ضرب چگالی‌های X و Y است. پس

$$
\begin{aligned}
P(X+Y \geq ۲۵۰) &= \iint_{x+y\geq ۲۵۰} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \\
&= \iint_{x+y\geq ۲۵۰} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy \qquad (\text{بنا به استقلال}) \\
&= \iint_{x+y\geq ۲۵۰} \frac{۱}{۱۰۰} e^{-\frac{x}{۱۰۰}} \times \frac{۱}{۱۲۰} e^{-\frac{y}{۱۲۰}}\,dx\,dy \\
&= \frac{۱}{۱۲۰۰۰} \int_۰^{۲۵۰} \int_{۲۵۰-y}^{\infty} e^{-(\frac{x}{۱۰۰}+\frac{y}{۱۲۰})}\,dx\,dy \\
&\quad + \frac{۱}{۱۲۰۰۰} \int_{۲۵۰}^{\infty} \int_۰^{\infty} e^{-(\frac{x}{۱۰۰}+\frac{y}{۱۲۰})}\,dx\,dy \\
&= ۰/۲۶۴ + ۰/۱۲۵ = ۰/۳۸۹
\end{aligned}
$$

یک نتیجه مهم از استقلال دو متغیر تصادفی در گزاره زیر بیان شده است.

گزاره ۳.۴ هرگاه X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند، آنگاه

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$$

که در آن g و h توابعی دلخواه هستند.

نتیجه به عنوان حالت خاصی از گزاره بالا، می‌توان نتیجه گرفت که اگر X و Y مستقل باشند، آنگاه

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

و لذا $Cov(X,Y) = ۰$. پس به طور خلاصه، اگر دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند آنگاه کوواریانس

بین آنها صفر است. البته عکس این نکته همواره برقرار نیست، یعنی صفر بودن کوواریانس بین دو متغیر لزوماً به معنی استقلال آنها نیست (تمرین ۳.۴ را ببینید.)

این بخش را با گزاره‌ای مربوط به متغیرهای تصادفی مستقل به پایان می‌بریم. خواننده به یاد می‌آورد که اگر پیشامدهای A و B مستقل باشند، احتمال مشروط A با فرض B، برابر با همان احتمال A است. مشابه چنین حکمی درباره متغیرهای تصادفی مستقل نیز درست است.

گزاره ۴.۴ اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند، آنگاه: به ازای هر مقدار y که $f_Y(y) > 0$،

$$f_{X|Y}(x|Y=y) = f_X(x)$$

و به ازای هر مقدار x که $f_X(x) > 0$،

$$f_{Y|X}(y|X=x) = f_Y(y)$$

۵.۴ تعمیم به حالت چند متغیره

در این بخش مفهوم متغیر تصادفی، تابع احتمال، تابع توزیع احتمال و دیگر مفاهیم مربوط به آنها را به حالت چند متغیره گسترش می‌دهیم. گسترش این مفاهیم به حالت چندمتغیره تقریباً به همان صورتی است که هنگام تعمیم این مفاهیم به حالت دومتغیره انجام شد.

تعریف ۱۲.۴ چنانچه $X_1, \cdots, X_n$ متغیرهای تصادفی گسسته بر فضای نمونه S باشند، آنگاه تابع احتمال توأم $X_1, \cdots, X_n$ عبارت است از

$$P_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\cdots,x_n) = P(X_1 = x_1,\cdots,X_n = x_n)$$

که بیان می‌کند

الف) متغیرهای تصادفی $X_1, \cdots, X_n$، هرکدام، چه مقادیری را اختیار می‌کنند، و

ب) هر nتایی $(x_1, \cdots, x_n)$ با چه احتمالی رخ می‌دهد.

تعمیم دو شرط بیان شده پس از تعریف ۱.۴ در حالت چند متغیره نیز برقرار است، و به علاوه احتمال هر پیشامد مانند $A \subset R^n$ را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد

$$P[(X_1,\cdots,X_n) \in A] = \sum \overset{\cdots}{}_{(x_1,\cdots,x_n)\in R^n} \sum P_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\cdots,x_n)$$

در حالتی که $S_{(X_1,\ldots,X_n)}$، یعنی مجموعه مقادیر متغیرهای تصادفی مورد مطالعه، یک پیوستار n بعدی باشد، تعریف زیر را داریم.

تعریف ۱۳.۴ تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی پیوسته $X_1,\ldots,X_n$، تابعی نامنفی مانند $f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\cdots,x_n)$ است، به طوری که برای هر پیشامد A از R^n داشته باشیم

$$P[(X_1,\cdots,X_n)\in A]=\int\cdots\int_A f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\cdots,x_n)dx_1,\cdots,dx_n$$

نکته‌هایی که پس از تعریف ۳.۴ برشمردیم، پس از تعمیم‌های مناسب، برای حالت چندمتغیره برقرار هستند. تعریف تابع توزیع توأم چندمتغیره نیز به طور مشابه با تعریف ۴.۴ انجام می‌شود. با معلوم بودن تابع احتمال توأم (در حالت پیوسته، تابع چگالی احتمال توأم) می‌توان تابع‌های حاشیه‌ای را به دست آورد. البته در حالت n متغیره با توابع حاشیه‌ای بسیاری روبرو هستیم. به عنوان یک قاعده کلی، تابع احتمال (چگالی احتمال) حاشیه‌ای هر زیرمجموعه از متغیرها، عبارت از تصویر تابع احتمال (چگالی احتمال) توأم بر روی زیرفضای مقادیر زیرمجموعه است. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۵.۴ فرض کنید $X_1,\cdots,X_n$، n متغیر تصادفی باشند. چنانچه این متغیرها گسسته باشند، تابع احتمال حاشیه‌ای X_2 و X_n، و در صورتی که پیوسته باشند، تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X_2 و X_n به ترتیب عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}
P_{X_2,X_n}(x_2,x_n) &= P(X_2=x_2,X_n=x_n)\\
&=\sum_{x_1}\sum_{x_3}\cdots\sum_{x_{n-1}}P_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\cdots,x_n)\\
f_{X_2,X_n}(x_2,x_n) &= \int_{x_1}\int_{x_3}\cdots\int_{x_{n-1}}f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\cdots,x_n)dx_{n-1}\cdots dx_3dx_1
\end{aligned}$$

تعمیم تعریف ۹.۴ (توزیع‌های شرطی) نیز در حالتی که بیش از دو متغیر تصادفی داشته باشیم، کاملاً سرراست است. در این باره مثال زیر می‌تواند راهگشا باشد. مثال زیر این مزیت را دارد که طی آن با شیوه‌ای متفاوت برای یافتن تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای آشنا می‌شویم.

مثال ۱۶.۴ تابع چگالی احتمال توأم سه متغیر تصادفی X و Y و Z را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$f(x,y,z)=\frac{3}{4\pi}\qquad x^2+y^2+z^2\le 1$$

یعنی، چگالی احتمال در درون و روی کره واحد مقدار ثابتی است و این مقدار ثابت برابر عکس حجم کره است (به گونه‌ای انتگرال تابع چگالی در داخل و روی کره، برابر یک است).

الف) تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای Z را بیابید.

ب) تابع چگالی احتمال شرطی $f(x, y|Z = k)$ را به دست آورید.

حل: الف) نخست تابع توزیع Z را می‌یابیم، سپس از آن مشتق می‌گیریم و تابع چگالی Z را به دست می‌آوریم. با توجه به یکنواخت بودن توزیع، به ازای $|z| \leq 1$ داریم

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \frac{\text{حجم قسمتی از کره واقع در زیر } z = Z}{\text{حجم کره}}$$
$$= \frac{3}{4\pi}\int_{-1}^{z} \pi(1 - z^2)dz = \frac{1}{4}(2 + 3z - z^3)$$

بنابراین، تابع چگالی Z عبارت است از

$$f_Z(z) = \frac{3}{4}(1 - z^2) \qquad -1 < z < 1$$

توجه کنید که چگالی احتمال حاشیه‌ای Z، همان طور که انتظار می‌رود، در مجاورت $z = 0$ بزرگ است و در مجاورت $z = 1, -1$ کوچکترین مقدار را دارد (و در خارج از فاصله $|z| < 1$ صفر است.)

ب) چگالی شرطی توأم X و Y، با فرض $Z = k$، به ازای $x^2 + y^2 \leq 1 - k^2$ عبارت است از

$$f(x, y|Z = k) = \frac{f(x, y, k)}{f_Z(k)} = \frac{3/(4\pi)}{3(1 - k^2)/4} = \frac{1}{\pi(1 - k^2)}$$

یعنی توزیع شرطی توأم X و Y، با فرض $Z = k$، یک توزیع یکنواخت در داخل دایره‌ای با شعاع $1 - k^2$ است.

استقلال

تعریف استقلال در حالتی که بیش از دو متغیر تصادفی داریم، به طور مشابه با حالت دومتغیره ارائه می‌شود (رک به تعریف ۱۱.۴).

تعریف ۱۴.۴ الف) متغیرهای تصادفی گسسته $X_1, \cdots, X_n$ را مستقل گوییم اگر

$$P_{X_1 \cdots X_n}(x_1, \cdots, x_n) = P_{X_1}(x_1) \cdots P_{X_n}(x_n) \quad \forall (x_1, \cdots, x_n)$$

ب) متغیرهای تصادفی پیوسته $X_1, \cdots, X_n$ را مستقل گوییم اگر

$$f_{X_1, \ldots, X_n}(x_1, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n) \quad \forall (x_1, \cdots, x_n)$$

که در آن‌ها $P_{X_i}(x_i)$ و $f_{X_i}(x_i)$، به ازای $i = 1, \cdots, n$، به ترتیب توابع احتمال حاشیه‌ای و توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای هستند.

مانند حالت دومتغیره (گزاره ۲.۴) در اینجا نیز می‌توان احکامی را در این باره که تحت فرض استقلال، توزیع‌های شرطی با توزیع‌های غیر شرطی برابر هستند بیان کرد، که برای اختصار از بیان آن‌ها چشم‌پوشی می‌کنیم.

امید ریاضی

تعریف ۱۵.۴ متغیرهای تصادفی $X_1, \cdots, X_n$ را در نظر بگیرید. امید ریاضی تابع $g(X_1, \cdots, X_n)$ از این متغیرها، در صورت وجود، به صورت زیر برای دو حالت گسسته و پیوسته تعریف می‌شود

$$Eg(X_1, \cdots, X_n) = \begin{cases} \sum_{x_n} \cdots \sum_{x_1} g(x_1, \cdots, x_n) P_{X_1, \ldots, X_n}(x_1, \cdots, x_n) \\ \int_{x_n} \cdots \int_{x_1} g(x_1, \cdots, x_n) f_{X_1, \ldots, X_n}(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \end{cases}$$

امید ریاضی‌ها و واریانس‌های شرطی نیز دقیقاً مانند حالت دومتغیره (تعریف ۱۰.۴ و ادامه‌ی آن) تعریف می‌شوند.

نکته ۶ اگر g تابعی از یک یا چند متغیر خاص باشد، می‌توان امید ریاضی g را با استفاده از تابع حاشیه‌ای آن متغیر(ها) به دست آورد. به ویژه امید ریاضی و واریانس هریک از متغیرها و کوواریانس هر دو متغیر را می‌توان بر پایه‌ی توابع حاشیه‌ای محاسبه کرد.

در ادامه چند نتیجه مهم را درباره امید ریاضی و واریانس متغیرهای تصادفی بیان می‌کنیم.

گزاره ۵.۴ اگر $c_1, \cdots, c_n$ مقادیر ثابت، و $g_1, \cdots, g_n$ توابعی دلخواه باشند، آنگاه

$$E[\sum_{i=1}^{n} c_i g_i(X_1, \cdots, X_k)] = \sum_{i=1}^{n} c_i E g_i(X_1, \cdots, X_k)$$

این ویژگی، خطی بودن عملگر امید ریاضی نامیده می‌شود.

نتیجه ۲.۴

$$\begin{aligned} E(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i) &= \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i) \\ V(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i) &= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 V(X_i) + \sum_{i \neq j} \sum c_i c_j Cov(X_i, X_j) \end{aligned}$$

توجه کنید که در حالت خاصی که متغیرهای تصادفی $X_1, \cdots, X_n$ دو به دو مستقل باشند، رابطه اخیر به صورت زیر ساده می‌شود

$$V(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 V(X_i)$$

گزاره ۶.۴ هرگاه $X_1, \cdots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند، آنگاه

$$E[g_1(X_1) \cdots g_n(X_n)] = Eg_1(X_1) \cdots Eg_n(X_n)$$

که در آن $g_1, \cdots, g_n$ توابعی دلخواه هستند. به ویژه، به عنوان حالتی خاص از رابطه فوق،

$$E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n)$$

مثال ۱۷.۴ متغیرهای تصادفی مستقل X_1، X_2 و X_3 دارای میانگین‌های ۴، ۹ و ۳ و واریانس‌های ۳، ۷ و ۵ هستند. میانگین و واریانس Y و Z را به دست آورید که

$$Y = 3X_1 - 2X_2 - X_3 \quad , \quad Z = X_1 + 3X_2 - 5X_3$$

حل: بنا به ویژگی خطی بودن عملگر امید ریاضی،

$$\begin{aligned} E(Y) &= 3E(X_1) - 2E(X_2) - E(X_3) \\ &= 12 - 18 - 3 = -9 \\ E(Z) &= E(X_1) + 3E(X_2) - 5E(X_3) \\ &= 4 + 27 - 15 = 16 \end{aligned}$$

همچنین، بنا به استقلال متغیرهای X_1 و X_2 و X_3، طبق نتیجه ۲.۴، داریم

$$\begin{aligned} V(Y) &= 9V(X_1) + 4V(X_2) + V(X_3) \\ &= 27 + 28 + 5 = 60 \\ V(Z) &= V(X_1) + 9V(X_2) + 25V(X_3) \\ &= 3 + 63 + 125 = 191 \end{aligned}$$

مثال ۱۸.۴ مثال ۱۷.۴ را با حذف فرض استقلال و افزودن این اطلاعات که $Cov(X_1, X_2) = 1$، $Cov(X_1, X_3) = -3$ و $Cov(X_2, X_3) = -2$، تکرار کنید.

حل: مقادیر $E(Y)$ و $E(Z)$ تغییری نمی‌کنند. برای محاسبه $V(Y)$، طبق نتیجه ۲.۴، داریم

$$\begin{aligned} V(Y) &= 9V(X_1) + 4V(X_2) + V(X_3) \\ &\quad -6Cov(X_1, X_2) - 3Cov(X_1, X_3) + 2Cov(X_2, X_3) \\ &= 27 + 28 + 5 - 6 + 9 - 4 = 59 \end{aligned}$$

به طور مشابه، مقدار $V(Z)$ نیز برابر با ۲۳۹ به دست می‌آید.

در مثال بعد برای محاسبه امید ریاضی، ترفندی به کار رفته است که در بعضی از مسائل کارایی دارد. برای نمونه‌هایی دیگر به تمرین‌های ۱۲.۴، ۱۳.۴ و ۱۶.۴ مراجعه کنید.

مثال ۱۹.۴ اتوبوس فرودگاهی ۱۲ مسافر را در ۷ ایستگاه پیاده می‌کند. فرض کنید احتمال پیاده شدن هر مسافر در هریک از ایستگاه‌ها مساوی باشد. اتوبوس تنها در ایستگاهی توقف می‌کند که شخصی قصد پیاده شدن داشته باشد. امید تعداد توقف‌های اتوبوس چقدر است؟

حل: از متغیر نشانگر کمک می‌گیریم. فرض کنید X_i برابر یک یا صفر باشد بسته به اینکه شخصی در ایستگاه iام پیاده شود یا خیر، یعنی

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اتوبوس در ایستگاه } i \text{ام توقف کند} \\ 0 & \text{اتوبوس در ایستگاه } i \text{ام توقف نکند} \end{cases}$$

مقدار $X = \sum_{i=1}^{7} X_i$ برابر است با تعداد توقف‌های اتوبوس، و لذا امید توقف‌های اتوبوس برابر است با

$$E(X) = E(\sum_{i=1}^{7} X_i) = \sum_{i=1}^{7} E(X_i)$$

تساوی اخیر از خطی بودن عملگر امید ریاضی نتیجه شده است. اما

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 1 \times P(\text{شخصی در ایستگاه } i \text{ام پیاده شود}) + 0 \times P(\text{هیچکس در ایستگاه } i \text{ام پیاده نشود}) \\ &= P(\text{شخصی در ایستگاه } i \text{ام پیاده شود}) \\ &= 1 - P(\text{هیچکس در ایستگاه } i \text{ام پیاده نشود}) \\ &= 1 - (\tfrac{6}{7})^{12} = 0/843 \end{aligned}$$

بنابراین

$$E(X) = \sum_{i=۱}^{۷} ۰/۸۴۳ = ۷ \times ۰/۸۴۳ = ۵/۹$$

تمرین‌های فصل چهارم

۱.۴ در جعبه‌ای ۱۲ کالا شامل ۷ کالای سالم، ۳ کالای نیمه معیوب و ۲ کالای معیوب وجود دارد. چهار کالا از جعبه انتخاب می‌کنیم. فرض کنید X و Y به ترتیب نشان دهنده تعداد کالاهای نیمه معیوب و معیوب در نمونه‌ی انتخابی باشند.

الف) تابع احتمال توأم X و Y را بیابید.

ب) $E(X)$، $E(Y)$ و $E(X+Y)$ را بیابید.

پ) $V(X)$ و $V(Y)$ را به دست آورید.

ت) انتظار دارید کوواریانس X و Y مثبت باشند یا منفی؟ چرا؟

ث) $V(X+Y)$ را به دست آورید و مقدار آن را با مقدار $V(X)+V(Y)$ مقایسه کنید.

۲.۴ دو متغیر تصادفی مستقل $X_۱$ و $X_۲$ دارای توابع احتمال زیر هستند

$$P(X_۱=-۱)=P(X_۱=۱)=\frac{۱}{۴}\ ,\ \ P(X_۱=۰)=\frac{۱}{۲}$$

$$P(X_۲=-۱)=P(X_۲=۰)=P(X_۲=۱)=\frac{۱}{۳}$$

الف) $E(X_۱)$، $E(X_۲)$، $V(X_۱)$ و $V(X_۲)$ را بیابید.

ب) $E(۴X_۱+۳X_۲)$ و $V(۴X_۱+۳X_۲)$ را به دست آورید.

پ) جدول تابع احتمال توأم $X_۱$ و $X_۲$ را تشکیل دهید.

۳.۴ دو متغیر تصادفی X و Y دارای توزیع توأم زیر هستند

$X\backslash Y$	۱	۳	۵
۰	۰/۱۰	۰/۱۰	۰/۱۰
۱	۰/۱۰	۰/۲۰	۰/۱۰
۲	۰/۱۰	۰/۱۰	۰/۱۰

تحقیق کنید که گرچه $Cov(X,Y)=۰$ اما X و Y وابسته به هم‌اند. (این مثال نشان می‌دهد که دو متغیر تصادفی ممکن است به طریقی وابسته به هم باشند که معیار کوواریانس این وابستگی را منعکس نکند.)

۴.۴ دو تابع احتمال دو متغیره الف و ب زیر را در نظر بگیرید. در هر حالت تابع احتمال حاشیه‌ای X و تابع احتمال حاشیه‌ای Y را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تصادفی، مستقل از X_1 با توزیع نمایی و با میانگین ۷ هزار ساعت است. مطلوب است تعیین احتمال اینکه نسبت زمان کارکرد بعد از تعمیر سیستم خنک‌کننده به زمان کارکرد قبل از تعمیر $\left(\frac{X_2}{X_1}\right)$ بیش از ۰/۸ باشد.

۱۰.۴ فرض کنید که سختی راکول (X) و میزان ساییدگی (Y) یک نوع آلیاژ دارای چگالی توأم زیر است

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} x+y & 0\leq x,y\leq 1 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

الف) چگالی‌های حاشیه‌ای X و Y را پیدا کنید.

ب) $E(X)$ و $V(X)$ را بیابید.

پ) چگالی شرطی $f(x|Y=y)$ و $E(X|Y=y)$ را به دست آورید.

۱۱.۴ تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & 0<x<y \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

الف) توابع چگالی حاشیه‌ای را بیابید.

ب) توابع چگالی شرطی را بیابید.

پ) $P(X<2|Y<3)$ و $P(X<2|Y=3)$ را محاسبه کنید.

ت) $E(X|Y=y)$ و $E(Y|X=x)$ را به دست آورید.

۱۲.۴ جامعه‌ای شامل ۱۰۰ زوج متأهل است. اگر در طی یکسال ۲۰ نفر از این جامعه فوت کنند، امید ریاضی تعداد زوج‌هایی که زنده می‌مانند چقدر است؟ فرض کنید تمام $\binom{200}{20}$ دسته ۲۰ تایی دارای شانس برابر هستند برای آنکه ۲۰ نفری باشند که فوت می‌کنند.

راهنمایی: به ازای $i=1,2,\ldots,20$ فرض کنید

$$X_i=\begin{cases} 1 & \text{هیچ‌یک از اعضای زوج } i \text{ فوت نکنند} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۱۳.۴ شش فروند هواپیمای بمب‌افکن به یکی از مناطق حمله می‌کنند. در این منطقه ۱۱ ضد هوایی مستقر است که هنگام حمله خدمه هرکدام از آنها یکی از هواپیماها را، به تصادف و مستقل از دیگران، هدف می‌گیرد. اگر هر ضد هوایی هدف خود را، مستقل از دیگری، با احتمال p بزند انتظار دارید چند هواپیما سرنگون شود؟