شماره ۱۴۵
دکتر حاجی

احتمال و آمار مهندسی

(ویرایش دوم)

فصل‌های اول تا دهم

سید محمود طاهری

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

عنوان	صفحه

فصل ۱

احتمال

مقدمه

همه ما دانسته یا ندانسته کلمه احتمال را در محاوره روزانه خود به کار می‌بریم. عبارت‌هایی مانند: "احتمال دارد فردا باران بیاید"، "احتمال موفقیت در این کار بسیار کم است"، "به احتمال زیاد علت از کار افتادن سیستم مربوط به دستگاه سوم است" و ... از این مقوله هستند.

از لحاظ تاریخی پیدایش علم احتمال به قرن شانزدهم میلادی باز می‌گردد. در آن زمان بازی‌های شانسی از جمله مسئله‌ی چگونگی تقسیم جایزه یک بازی نیمه تمام بین دو بازیکن، با دانستن امتیازهای آن دو در موقع قطع بازی و تعداد امتیازهای لازم برای برد، مورد توجه بود. این مسئله، موسوم به مسئله‌ی امتیازها، را تعدادی از ریاضیدان‌ها مورد بحث قرار داده بودند تا اینکه پاسکال (۱۶۶۳_۱۶۲۳) برای پاسخ به پرسشی درباره‌ی این بازی شروع به مکاتباتی با فرما (۱۶۶۵_۱۶۰۱) کرد و چنین شد که این دو در مکاتبات ارزنده‌ی خود شالوده علم احتمال را پی ریختند و هویگنس (۱۶۹۵_۱۶۲۹) توانست اولین رساله را درباره‌ی احتمال بر مبنای مکاتبات پاسکال و فرما به نگارش درآورد. علم احتمال پیشرفت‌های خود را که محدود به بازی‌های شانسی، نظریه خطاها و توزیع‌ها بود تا قرن بیستم ادامه داد. اما از این زمان علم احتمال آغاز به گسترش کرد و به تدریج به نظام گسترده‌ای تبدیل شد که هم‌اکنون با بسیاری از شاخه‌های ریاضی و دیگر علوم نظری و کاربردی ارتباط دارد.

در این فصل مفاهیم مقدماتی احتمال و چگونگی محاسبه احتمال پیشامدهای مختلف ارائه می‌گردد.

۱.۱ آزمایش تصادفی، فضای نمونه و پیشامد

پدیده‌هایی که در زندگی با آن سروکار داریم از دیدگاه احتمالی بر دو نوع‌اند: جبری و معین، غیرجبری و نامعین. پدیده‌های معین آنهایی هستند که تحت مجموعه‌ای مشخص از شرایط، همواره منجر به یک نتیجه می‌شوند. مثلاً اگر توپی از ارتفاع d متر رها شود همواره پس از $t = \sqrt{\frac{۲d}{g}}$ ثانیه به زمین خواهد رسید (g: شتاب جاذبه). اما پدیده‌های دیگری وجود دارند که مشاهده مکرر آنها همیشه به نتیجه یکسانی منجر نمی‌شود. از مثال ساده پرتاپ یک تاس تا انتخاب یک لامپ از تولیدات یک کارخانه و بررسی مدت زمان کارکرد آن و یا نمونه‌برداری از سنگهای یک معدن برای بررسی درصد یک مادهٔ خاص در آن و ... همگی مواردی هستند که در آنها با پدیده‌های غیرقطعی و تصادفی سروکار داریم. پدیده‌های تصادفی، موضوع علم احتمال است. در این بخش با مفاهیم مقدماتی مربوط به پدیده‌های تصادفی آشنا می‌شویم.

آزمایش آزمایش به عملی گفته می‌شود که نتیجهٔ اجرای آن جمع‌آوری اطلاعات است. معمولاً آزمایش با حرف E نشان داده می‌شود.

آزمایش تصادفی آزمایش تصادفی به آزمایشی گفته می‌شود که گرچه کلیه نتایج ممکن آن شناخته شده است، اما نتیجه دقیق آن قبل از انجام آزمایش معلوم نیست. هر نتیجه آزمایش را یک "برآمد" می‌نامیم. مجموعه برآمدهای یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه آزمایش نامیده و با S نشان می‌دهیم.

مثال ۱.۱ آزمایشهای زیر هرکدام یک آزمایش تصادفی هستند. فضای نمونه در هر مورد مشخص شده است.

$E_۱$:	اندازه‌گیری طول عمر یک لامپ	$S = \{t \,;\, t \geq ۰\}$	← پیوسته ناشمارا
$E_۲$:	تعداد تصادفات روزانه در جاده تهران-اصفهان	$S = \{۰, ۱, ۲, \cdots\}$	← گسسته
$E_۳$:	علت از کار افتادن یک دستگاه متشکل از سه جزء A, B, C	$S = \{A, B, C\}$	← گسسته
$E_۴$:	ماکزیمم دبی سیلابهای حوضهٔ یک سد در هر سال	$S = \{x \,;\, x \geq ۰\}$	← پیوسته ناشمارا

پیشامد هر زیرمجموعه از فضای نمونه یک آزمایش را یک پیشامد گوییم. پیشامدها را با حروف بزرگ لاتین مانند A، B و ... نشان می‌دهیم. گوییم یک پیشامد رخ داده است اگر برآمد آزمایش تصادفی متعلق به آن پیشامد باشد. فضای نمونه آزمایش یعنی S را پیشامد حتمی نامیده و مجموعه تهی، ϕ، را پیشامد نامحتمل می‌نامیم. هر پیشامد یک‌عضوی را پیشامد ساده گوییم.

مثال ۲.۱ برای هریک از آزمایشهای تصادفی مثال قبل، دو پیشامد تعریف می‌کنیم.

$E_1 - 1$	لامپ دست‌کم ۱۰۰ ساعت عمر کند	$A = \{t\ ;\ t \geq 100h\}$
$E_1 - 2$	لامپ حداکثر ۵۰۰ ساعت عمر کند	$B = \{t\ ;\ t \leq 500h\}$
$E_2 - 1$	تعداد تصادفات حداکثر ۴ باشد	$C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
$E_2 - 2$	بیش از ۵ تصادف رخ دهد	$D = \{6, 7, 8, \cdots\}$
$E_3 - 1$	علت خرابی واحد A باشد	$E = \{A\}$
$E_3 - 2$	علت خرابی واحد A یا B باشد	$F = \{A, B\}$
$E_4 - 1$	ماکزیمم دبی سیلاب‌های سالانه بیش از $500(\frac{m^3}{s})$ باشد	$G = \{x\ ;\ x > 500\}$
$E_4 - 2$	ماکزیمم دبی سیلاب‌های سالانه حداکثر $700(\frac{m^3}{s})$ باشد	$H = \{x\ ;\ x \leq 700\}$

مجموعه همه پیشامدهای یک آزمایش تصادفی یعنی مجموعه زیرمجموعه‌های مناسب فضای نمونه را فضای پیشامدها نامیده و با $\mathcal{A}$ نمایش می‌دهیم.

۲.۱ اعمال جبری روی پیشامدها

فرض کنید S فضای نمونه یک آزمایش و A و B دو پیشامد از آن باشد، آنگاه

الف) اجتماع دو پیشامد A و B که با $A \cup B$ نمایش داده می‌شود عبارت است از پیشامد آنکه "A رخ دهد یا B رخ دهد، یا هردو".

ب) اشتراک دو پیشامد A و B، که با $A \cap B$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از پیشامد آنکه "هم A رخ دهد و هم B". در حالتی‌که $A \cap B = \phi$، دو پیشامد A و B را ناسازگار گوییم.

پ) متمم پیشامد A، که با $\overline{A}$ یا با A' نشان داده می‌شود، عبارت است از پیشامد آنکه "A رخ ندهد". یعنی نتیجه آزمایش عضو A نباشد.

ت) تفاضل پیشامد B از A، $A - B$، عبارت است از پیشامد آنکه A رخ دهد ولی B رخ ندهد. واضح است که $A - B = A \cap \overline{B}$.

ث) گوییم A زیرپیشامدی از پیشامد B است، $A \subseteq B$، اگر رخ دادن پیشامد A رخ دادن پیشامد B را نتیجه دهد.

مثال ۳.۱ فرض کنید A پیشامد آن باشد که فردا باران بیاید، و B پیشامد آنکه پس‌فردا باران بیاید. آنگاه $A \cup B$ پیشامد آن است که فردا یا پس‌فردا (یا هر دو روز) باران بیاید.

$A \cap B$ پیشامد آن است که فردا و پس‌فردا باران بیاید.

A' پیشامد آن است که فردا باران نیاید.

$A - B = A \cap B'$ پیشامد آن است که فردا باران بیاید و پس‌فردا باران نیاید.

مثال ۴.۱ یک واحد صنعتی از سه خط تولید تشکیل شده است. پیشامدهای A و B و C را به ترتیب پیشامدهای فعال بودن خطوط تولید ۱ و ۲ و ۳ در نظر می‌گیریم. در این صورت

$A \cup B \cup C$ پیشامد آن است که دست‌کم یکی از سه خط تولید فعال است.

$A \cap B \cap C$ پیشامد آن است که هر سه خط تولید فعال هستند.

$A - B = A \cap B'$ پیشامد آن است که خط تولید ۱ فعال است ولی خط تولید ۲ فعال نیست.

۳.۱ تعریف احتمال و خواص آن

سه دیدگاه برای تعریف و تعبیر احتمال رایج است. نخست این سه دیدگاه را بیان می‌کنیم. آنگاه احتمال را در یک چارچوب اصول موضوعی تعریف می‌کنیم، به طوری که با هر سه تعبیر سازگار باشد.

الف) تعبیر احتمال به روش کلاسیک

این تعبیر احتمال بر پایه‌ی مفهوم "همشانس بودن پیشامدهای ساده" است. برای مثال در پرتاب یک تاس شش برآمد ۱ و ۲ و ... و ۶ وجود دارد. پس این آزمایش شامل شش پیشامد ساده $\{۱\}, \{۲\}, \cdots, \{۶\}$ است. اگر تاس سالم باشد آنگاه این پیشامدها، همشانس هستند و لذا به هرکدام از آنها وزن یکسان داده و مقدار احتمال $\frac{۱}{۶}$ را نسبت می‌دهیم. در این گونه موارد از رابطه زیر برای احتمال یک پیشامد استفاده می‌شود.

$$\text{احتمال رخ‌دادن پیشامد } A = P(A) = \frac{\text{تعداد عضوهای پیشامد } A}{\text{تعداد عضوهای فضای نمونه}} = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد حالات ممکن}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

این تعبیر از احتمال تنها در موارد خاص قابل استفاده است (در بخش ۴.۱ به این موارد پرداخته می‌شود) و محدودیت‌های اساسی دارد. از جمله اگر فضای نمونه نامتناهی باشد و یا اینکه فضای نمونه متناهی باشد ولی پیشامدهای ساده آن همشانس نباشند، از روش فوق نمی‌توان استفاده کرد.

ب) تعبیر احتمال به روش فراوانی نسبی

بر پایه‌ی این تعبیر، احتمال هر پیشامد عبارت است از حد فراوانی نسبی رخداد آن پیشامد در تکرار فراوان آزمایش تحت شرایط یکسان. فرض کنید یک آزمایش تصادفی را تحت شرایط یکسان n بار تکرار کنیم و

$n(A)$ بار پیشامد A رخ دهد، آنگاه فراوانی نسبی رخداد A برابر با $\frac{n(A)}{n}$ است. گرچه $\frac{n(A)}{n}$ ممکن است برای nهای کوچک ناپایدار باشد ولی، چنانچه آزمایشها در شرایط یکسان انجام شوند، غالباً با افزایش n مقدار $\frac{n(A)}{n}$ به یک عدد میل می‌کند که آن را با $P(A)$ نشان داده و احتمال رخ دادن پیشامد A تعریف می‌کنیم. تعبیر فراوانی نسبی، تعبیر رایج در احتمال است که در اغلب مسائل نیز از این تعبیر می‌توان استفاده کرد. البته انتقاداتی نیز بر آن وارد شده است ازجمله اینکه بزرگ بودن n یک امر نسبی است و نیز اینکه یکسان‌سازی شرایط آزمایش به سادگی ممکن نیست. از اینها گذشته اصولاً بعضی پیشامدها قابل تکرار نیستند مثلاً عبارت "احتمال وجود حیات در کره مریخ" را با تعبیر فراوانی نسبی از احتمال نمی‌توان بیان و تفسیر کرد.

پ) تعبیر احتمال به عنوان درجه اعتقاد

در این تعبیر از احتمال، هر فرد بر پایه‌ی اطلاعات و دانسته‌های خود احتمالی را به یک پیشامد نسبت می‌دهد. این احتمال بیانگر میزان اعتقاد شخص به رخ دادن آن پیشامد است. در این تعبیر از احتمال هر شخص در مورد شانس وقوع یک پیشامد، به طور فردی به قضاوت می‌نشیند. بی‌شک افراد گوناگون با دانسته‌ها و باورهای مختلف، ممکن است به یک پیشامد احتمال‌های مختلفی را نسبت دهند. این تعبیر از احتمال در بعضی موارد، به ویژه در مواردی که تعبیرهای دیگر کارایی ندارد، رضایتبخش است. انتقاداتی نیز بر این تعبیر وارد است. از جمله اینکه چگونه باورهای شخصی را با احتمال بیان کنیم و چه راه منطقی وجود دارد که چند نفر که دیدگاه واحدی درباره‌ی یک پدیده دارند به محاسبه‌ی یکسان برای احتمال وقوع آن برسند.

تعریف ریاضی احتمال

پرسش‌ها و دشواریهای برخاسته از تعریف و تفسیر احتمال به هریک از سه روش فوق، موجب پدید آمدن دیدگاهی مبتنی بر اصل‌سازی شد. در این دیدگاه، اصولی آشکار در مورد احتمال پذیرفته می‌شود و آنگاه احتمال در یک قالب اصل موضوعی، که در عین حال مستعد هریک از تعابیر فوق باشد، تعریف می‌گردد.

تعریف ۱.۱ یک اندازه احتمال بر فضای نمونه‌ای S، تابعی از زیرمجموعه‌های S است که به هر پیشامد A از S یک عدد $P(A)$ به نام احتمال رخ دادن پیشامد A نسبت دهد؛ و در سه شرط زیر صدق کند:

۱) به ازای هر مجموعه A از S، مقدار تابع یک عدد نامنفی است، یعنی $P(A) \geq 0$.

۲) مقدار تابع برای S برابر یک است، یعنی $P(S) = 1$.

اصول موضوعه احتمال

۳) اگر A_1 و A_2 و ... دنباله‌ای از پیشامدها از S باشند و $i \neq j$ و $A_i \cap A_j = \phi$، آنگاه

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

اصل اول متأثر از این درک شهودی است که شانس رخداد یک پیشامد منفی نیست. از طرفی با انجام یک آزمایش، نتیجه آن حتماً (صددرصد) عضوی از فضای نمونه است و لذا $P(S) = 1$. اصل سوم این مطلب را بیان می‌کند که برای هر مجموعه از پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار، احتمال اینکه دست‌کم یکی از آنها رخ دهد برابر است با مجموع احتمالات هر پیشامد. اصل سوم به اصل جمعی نامتناهی معروف است. در حالتی‌که تعداد پیشامدها متناهی و مثلاً برابر n باشد رابطه اصل سوم تبدیل به رابطه زیر می‌شود که به اصل جمعی متناهی معروف است

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_1)$$

باید توجه داشت که تعبیرهای مختلف احتمال، که قبلاً به آنها اشاره کردیم، همگی در اصول موضوعه فوق صدق می‌کنند. مثلاً اگر $P(A)$ را به عنوان فراوانی نسبی پیشامد A در تکرار یک آزمایش تصادفی تعبیر کنیم، آنگاه $P(A)$ در هر سه اصل فوق صدق می‌کند: نسبت دفعاتی که نتیجه آزمایش در A می‌باشد عددی غیرمنفی است و نیز نسبت دفعاتی که نتیجه آزمایش در S است برابر یک است و اینکه اگر A و B برآمد مشترک نداشته باشند آنگاه نسبت دفعاتی که نتیجه آزمایش در هریک از A یا B قرار می‌گیرد برابر با مجموع هریک از فراوانیهای مربوطه است.

بر اساس اصول موضوعه احتمال می‌توان روابط مفیدی برای احتمال پیشامدها به دست آورد که مهم‌ترین آنها در قضیه‌های زیر بیان شده‌اند.

قضیه ۱.۱ الف) $P(\phi) = 0$، ب) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

اثبات: برای قسمت الف توجه کنید که چون S و ϕ جدا از هم‌اند، طبق اصل‌های دوم و سوم داریم

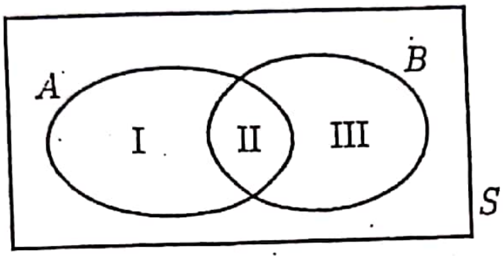
$$1 = P(S) = P(S \cup \phi) = P(S) + P(\phi) = 1 + P(\phi)$$

برای قسمت ب طبق اصل دوم داریم $P(S) = P(A \cup \overline{A}) = 1$. اما A و $\overline{A}$ دو پیشامد ناسازگارند، پس طبق اصل سوم $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$ که با مقایسه با رابطه قبلی نتیجه موردنظر به دست می‌آید.

قضیه ۲.۱ برای هر دو پیشامد دلخواه A و B

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

اثبات: به نمودار زیر توجه کنید



چون پیشامدهای I، II و III دوبه‌دو ناسازگارند، طبق اصل سوم سه رابطه زیر را داریم که از ترکیب آنها نتیجه مطلوب به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= P(I)+P(II)+P(III) \\ P(A) &= P(I)+P(II) \\ P(B) &= P(II)+P(III) \end{aligned}$$

بدیهی است که اگر $A\cap B=\phi$ آنگاه $P(A\cap B)=0$ و رابطه بالا تبدیل به حالت خاص $n=2$ از اصل جمعی متناهی می‌شود.

قضیه ۳.۱ الف) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

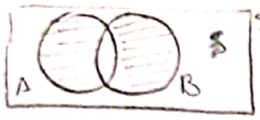
ب) اگر $B\subseteq A$ آنگاه $P(A-B)=P(A)-P(B)$

پ) اگر $B\subseteq A$ آنگاه $P(B)\leq P(A)$.

اثبات: اثبات روابط بالا آسان است و به خواننده واگذار می‌شود.

مثال ۵.۱ دستگاهی از دو واحد الف و ب تشکیل شده است. احتمال اینکه در یک روز کاری واحد الف از کار بیفتد ۰/۱۵ است (این احتمال را چگونه تعبیر می‌کنید؟) احتمال این حادثه برای واحد ب برابر ۰/۲۰ می‌باشد. به علاوه احتمال اینکه در یک روز هر دو دستگاه از کار بیفتند ۰/۰۳ است. مطلوبست احتمال اینکه در یک روز خاص:

الف) دست‌کم یک واحد از کار بیفتد.



ج) احتمال این را حساب کنید که فقط یکی از ۲ واحد از کار بیفتد؟

$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$

فقط یکی از کار بیفتد $= P(A-B) + P(B-A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - ۲P(A \cap B)$

ب) واحد ب کار کند ولی واحد الف از کار بیفتد.

حل: دو پیشامد A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

A : واحد الف از کار بیفتد

B : واحد ب از کار بیفتد

در این صورت بنا به قضیه ۲.۱

$$P(\text{دست‌کم یک واحد از کار بیفتد}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

اجتماع

$$= ۰/۱۵ + ۰/۲۰ - ۰/۰۳$$

$$= ۰/۳۲$$

و بنا به رابطه الف در قضیه ۳.۱

$$P(\text{واحد ب کار کند ولی واحد الف از کار بیفتد}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= ۰/۱۵ - ۰/۰۳ = ۰/۱۲$$

$P(B' - A') = P(B') - P(A' \cap B')$

$= ۱ - P(B) - ۱ + P(A \cup B) = ۰/۳۲ - ۰/۲ = ۰/۱۲$ همشانس

۴.۱ فضای نمونه کلاسیک و روش‌های اساسی شمارش

در بسیاری از آزمایشهای تصادفی، فضای نمونه شامل n عضو همشانس است. مثالهای ساده از این نوع عبارت‌اند از پرتاب سکه‌ای سالم، پرتاب یک تاس سالم و انتخاب یک فرد به تصادف از یک جمع. در چنین حالت‌هایی، و بر این اساس که احتمال کل فضای نمونه برابر یک است، نتیجه می‌شود که احتمال هر پیشامد ساده برابر $\frac{۱}{n}$ می‌باشد. لذا، طبق اصل سوم، احتمال هر پیشامد A را می‌توان از فرمول زیر محاسبه کرد:

$$P(A) = \frac{\text{تعداد اعضای مجموعه } A}{\text{تعداد کل اعضای فضای نمونه } S} = \frac{|A|}{|S|}$$

مثال ۶.۱ دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که مجموع شش رو شود. این احتمال را تعبیر کنید.

حل: در این مثال فضای نمونه S و پیشامد مجموع شش E عبارت‌اند از

$$S = \{(۱,۱), (۱,۲), \cdots, (۶,۶)\}$$

$$E = \{(۱,۵), (۲,۴), (۳,۳), (۴,۲), (۵,۱)\}$$

لذا $P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{۵}{۳۶}$. مقدار $\frac{۵}{۳۶}$ به این معنی است که اگر دو تاس سالم را با هم و به تعداد فراوان پرتاب کنیم، می‌توان انتظار داشت که در $\frac{۵}{۳۶}$ از دفعات، مجموع شش رو شود.

در مثال بالا شمارش تعداد حالت‌های فضای نمونه و پیشامد موردنظر دشوار نبود. اما در بسیاری موارد شمارش این حالات به سادگی ممکن نیست. در ادامه روش‌های اساسی شمارش را بیان می‌کنیم. این روش‌ها در محاسبه احتمالات مربوط به فضای نمونه کلاسیک به کار می‌آیند.

روش‌های اساسی شمارش

قاعده زیر اساسی‌ترین اصل شمارش است.

اصل اساسی شمارش: اگر عمل A را با m روش و به دنبال آن عمل B را با n روش بتوان انجام داد، آنگاه اعمال A و B را به دنبال هم با $m \times n$ روش می‌توان انجام داد.

به آسانی می‌توان اصل فوق را به هر تعداد عمل پیاپی تعمیم داد.

مثال ۷.۱ پی‌ریزی یک ساختمان را می‌توان به ۴ روش انجام داد. نمای ساختمان را می‌توان با ۳ روش و محوطه را با ۴ روش تکمیل کرد. به چند روش می‌توان کار پی‌ریزی و نما و محوطه‌سازی را انجام داد؟

حل: طبق اصل اساسی شمارش جواب عبارت است از $۴۸ = ۴ \times ۳ \times ۴$ روش.

مثال ۸.۱ از اعضای شورای کارگری یک کارخانه شامل ۶ مرد و ۳ زن دو نفر به تصادف انتخاب می‌شوند تا در یک دوره بازآموزی شرکت کنند. احتمال اینکه یک مرد و یک زن انتخاب شوند چقدر است؟

حل: اگر به ترتیبی که افراد انتخاب می‌شوند توجه کنیم، معلوم می‌شود که فرد اول از بین ۹ نفر و دومین فرد از بین ۸ نفر باقیمانده انتخاب می‌شود. پس فضای نمونه شامل $۷۲ = ۸ \times ۹$ حالت است. از طرفی $۱۸ = ۳ \times ۶$ روش وجود دارد که فرد اول مرد و فرد دوم زن باشد و نیز $۱۸ = ۶ \times ۳$ روش وجود دارد که اولی زن و دومی مرد باشد. پس کلاً در ۳۶ حالت یک مرد و یک زن انتخاب می‌شوند و لذا احتمال چنین اتفاقی برابر است با $\frac{۱}{۲} = \frac{۳۶}{۷۲}$.

جایگشت: هر آرایش مرتبی از کنار هم قرار گرفتن n شیء را یک جایگشت از آن اشیاء گوییم. اگر بخواهیم آرایشی از n شیء متمایز تشکیل دهیم، شیء اول می‌تواند هریک از n شیء باشد. دومین شیء در آرایش را می‌توان از $n - ۱$ شیء باقیمانده انتخاب کرد و الی‌آخر. پس طبق اصل اساسی شمارش، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با $۱ \times ۲ \times ۳ \times \cdots \times (n-۲) \times (n-۱) \times n$. برای عبارت اخیر از نماد $n!$ (n فاکتوریل) استفاده می‌شود. مثلاً $۱۲۰ = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ = ۵!$. بنا به

تعریف $۱ = !۰$.

مثال ۹.۱ می‌خواهیم هفت نوع گیاه را در باغچه کنار هم بکاریم. این کار به چند روش شدنی است؟

حل: $۵۰۴۰ = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ \times ۷ = !۷$.

مثال ۱۰.۱ گروهی شامل ۳ پسر و ۵ دختر به تصادف در یک صف قرار می‌گیرند. چقدر احتمال دارد که پسران کنار هم و دختران نیز کنار هم قرار گیرند؟

حل: تعداد کل حالت‌ها (جایگشت‌ها) برابر $۴۰۳۲۰ = !۸$ است. از طرفی تعداد حالت‌هایی که ۳ پسر کنار هم قرار می‌گیرند $۶ = !۳$ و تعداد حالت‌هایی که ۵ دختر کنار هم قرار می‌گیرند $۱۲۰ = !۵$ است. ممکن است کل پسرها در طرف چپ یا در طرف راست دخترها قرار گیرند. پس تعداد حالاتی که پسران کنار هم و دختران نیز کنار هم قرار می‌گیرند برابر است با $۱۴۴۰ = !۲ \times !۵ \times !۳$ و لذا

$$\text{احتمال مطلوب} = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات ممکن}} = \frac{۱۴۴۰}{۴۰۳۲۰} = ۰/۰۵$$

ترتیب: فرض کنید بخواهیم از n شیء متمایز، r شیء را به طور منظم (با رعایت ترتیب) انتخاب کنیم. شیء اول را با n روش و دومی را با $n-۱$ روش و ... و سرانجام rامین شیء را می‌توان با $n-r+۱$ روش انتخاب کرد. پس تعداد حالات ممکن عبارت است از

$$P_{n,r} = n(n-۱)\cdots(n-r+۱)$$

که اگر آن را در $(n-r)! = (n-r)\times(n-r-۱)\times\cdots\times۲\times۱$ ضرب و بر همین مقدار تقسیم کنیم، به شکل زیر ساده می‌شود

$$\boxed{P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

انتخاب r شی از n شی با ترتیب

مقدار $P_{n,r}$، تعداد ترتیب‌های rتایی از n شیء نامیده می‌شود.

مثال ۱۱.۱ یک شرکت ۷ کارشناس برای راه‌اندازی ۴ دستگاه مختلف دارد. به چند روش می‌توان ۴ کارشناس انتخاب و هریک را مسئول راه‌اندازی یک دستگاه کرد؟

حل: در این مثال علاوه بر انتخاب ۴ کارشناس از ۷ نفر، ترتیب گماشتن آنها بر دستگاه‌های مختلف نیز مهم است. بنابراین از فرمول ترتیب استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت

$$P_{۷,۴} = \frac{۷!}{(۷-۴)!} = \frac{۷\times۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!} = ۸۴۰$$

مثال ۱۲.۱ زمینه، حاشیه و طرح یک نوع پارچه قرار است با ۳ رنگ مختلف رنگ‌آمیزی شود. مجموعاً ۱۷ رنگ موجود است. به چند روش می‌توان کل پارچه را رنگ‌آمیزی کرد؟

حل:

$$P_{۱۷,۳} = \frac{۱۷!}{(۱۷-۳)!} = \frac{۱۷ \times ۱۶ \times ۱۵ \times ۱۴!}{۱۴!} = ۴۰۸۰$$

ترکیب: فرض کنید بخواهیم از n شیء متمایز، r شیء را انتخاب کنیم اما ترتیب انتخاب‌ها اهمیتی نداشته باشد. پس در مقابل هر $r!$ حالت از ترتیب‌های مختلفی که r شیء انتخاب شده دارند، فقط یک حالت داریم. در نتیجه تعداد ترکیب‌های rتایی از n شیء عبارت است از

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال ۱۳.۱ از بین ۱۷ رنگ می‌خواهیم ۳ رنگ را انتخاب و به نسبت مساوی مخلوط کنیم. این کار به چند روش ممکن است؟

حل: در مقایسه با مثال بالا، در اینجا ترتیب انتخاب رنگ‌ها مهم نیست، پس با مسئله ترکیب سروکار داریم

$$C_{۱۷,۳} = \binom{۱۷}{۳} = \frac{۱۷!}{۳!(۱۷-۳)!} = \frac{۱۷ \times ۱۶ \times ۱۵}{۳ \times ۲ \times ۱} = ۶۸۰$$

مثال ۱۴.۱ کلاسی شامل ۱۲ دختر و ۱۵ پسر است. شش نفر به تصادف برای شرکت در مسابقه علمی انتخاب می‌شوند. چقدر احتمال دارد تعداد دختران و پسران برابر باشد؟

حل: تعداد کل حالاتی که می‌توان ۶ نفر را از بین ۲۷ نفر انتخاب کرد $\binom{۲۷}{۶}$ است. تعداد حالاتی که ۳ دختر از بین ۱۲ دختر انتخاب می‌شوند $\binom{۱۲}{۳}$ و در پی آن حالات مشابه برای پسران $\binom{۱۵}{۳}$ است. دقت کنید که ترتیب ۳ دختر از بین ۱۲ دختر اهمیت ندارد و همین‌طور برای پسران. پس احتمال مطلوب عبارت است از

$$\frac{\binom{۱۲}{۳} \times \binom{۱۵}{۳}}{\binom{۲۷}{۶}} = \frac{۲۲۰ \times ۴۵۵}{۲۹۶۰۱۰} \simeq ۰/۳۳۸۲$$

مثال ۱۵.۱ در محموله‌ای شامل ۶۰ کالا، تعداد ۶ کالای معیوب وجود دارد. مأمور کنترل به تصادف ۱۰ کالا را انتخاب و آزمایش می‌کند و در صورت مشاهده بیش از یک کالای معیوب، محموله را رد می‌کند. چقدر احتمال دارد محموله رد شود؟

حل: فرض کنید A پیشامد این باشد که محموله رد شود. داریم

$$
\begin{aligned}
P(A) = P(\text{محموله رد شود}) &= P(\text{نمونه شامل بیش از یک کالای معیوب باشد}) \\
&= P(\text{نمونه دو کالای معیوب داشته باشد}) \\
&+ P(\text{نمونه ۳ کالای معیوب داشته باشد}) \\
&+ \cdots + P(\text{نمونه ۶ کالای معیوب داشته باشد})
\end{aligned}
$$

ملاحظه می‌کنید که محاسبه $P(A)$ مستلزم محاسبه پنج عبارت است. اما چنانچه از روش متمم استفاده کنیم، حجم محاسبات کمتر می‌شود:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= ۱ - P(\overline{A}) \\
&= ۱ - P(\text{محموله پذیرفته شود}) \\
&= ۱ - [P(\text{نمونه کالای معیوب نداشته باشد}) + P(\text{نمونه یک کالای معیوب داشته باشد})] \\
&= ۱ - \left[\frac{\binom{۶}{۰}\binom{۵۴}{۱۰}}{\binom{۶۰}{۱۰}} + \frac{\binom{۶}{۱}\binom{۵۴}{۹}}{\binom{۶۰}{۱۰}}\right] \\
&= ۱ - [۰/۳۱۷۴ + ۰/۴۲۳۲] = ۱ - ۰/۷۴۰۶ = ۰/۲۵۹۴
\end{aligned}
$$

۱۶.۱ شهری ۵ هتل دارد. در یک روز ۲۰ مسافر وارد شهر می‌شوند و هریک به تصادف هتلی را برای اقامت برمی‌گزینند. احتمال آنکه هیچ هتلی خالی نماند چقدر است؟

حل: مسافر اول به یکی از ۵ هتل مراجعه می‌کند. مسافر دوم نیز به همین ترتیب و ... . پس تعداد کل حالات ممکن مراجعه ۲۰ مسافر به هتل‌ها، برابر $۵^{۲۰}$ است. برای آنکه هیچ هتلی خالی نماند شرط می‌گذاریم که ۵ مسافر اول (یا هر پنج‌تای دیگر) در هتل‌های مختلف جای گیرند. در این صورت بقیه مسافرها در هر هتلی قرار گیرند به هرحال هتلی خالی نمانده است. مسافر اول با ۵ انتخاب روبروست و دومی با ۴ انتخاب و ... و پنجمی با ۱ انتخاب، که می‌شود $۵!$ حالت. هر ۱۵ مسافر بعدی با ۵ انتخاب روبروست. پس کلاً تعداد حالات مساعد برابر با $۵! \times ۵^{۱۵}$ است. لذا احتمال مطلوب برابر است با

$$\frac{۵! \times ۵^{۱۵}}{۵^{۲۰}} = \frac{۲۴}{۶۲۵}$$

مثال بالا نمونه‌ای از یک‌سری مسائل به نام "پر کردن جعبه‌ها" می‌باشد. حالت‌های کلی در طرح‌های تحقیقی ۵.۱ و ۶.۱ ارائه شده‌اند. دو حالت خاص نیز در تمرین ۳۲.۱ بحث شده‌اند.

صفحه‌ی ۱۳ و ۱۴ نیست
Scanned with CamScanner

مقدار ۰/۵۶ بدین معنی است که ۰/۵۶ از تولیدات شیفت اول توسط واحد الف تولید می‌شود.

$$P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{۰/۵۲}{۰/۹۱}=۰/۵۷$$

که بدین معنی است که ۰/۵۷ از کالاهای سالم توسط واحد الف تولید می‌شود.

ب) داریم $P(C)=۰/۹۱$ یعنی ۰/۹۱ تولیدات کارخانه سالم‌اند، و

$$P(C|A)=\frac{P(C\cap A)}{P(A)}=\frac{۰/۵۲}{۰/۵۵}=۰/۹۵$$

یعنی ۰/۹۵ تولیدات واحد الف، سالم است و

$$P(C|B)=\frac{P(C\cap B)}{P(B)}=\frac{۰/۵۱}{۰/۵۵}=۰/۹۳$$

یعنی ۰/۹۳ از تولیدات شیفت اول، سالم است. و سرانجام

$$P(\overline{C}|B)=۱-P(C|B)=۱-۰/۹۳=۰/۰۷$$

یعنی ۰/۰۷ از تولیدات شیفت اول، معیوب است.

قانون ضرب احتمال‌ها

رابطه احتمال شرطی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$$

و یا معادل آن

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$$

که آن را قانون ضرب احتمال‌ها گوییم. قانون ضرب هنگامی به کار می‌رود که محاسبه $P(B)$و $P(A|B)$ مستقیماً و به سادگی امکان داشته باشد، که در این صورت بر پایه‌ی آنها می‌توانیم $P(A\cap B)$ را بیابیم. قانون ضرب را می‌توان برای بیش از دو پیشامد نیز تعمیم داد. در مورد سه پیشامد، رابطه زیر به دست می‌آید

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B|A)P(C|A\cap B)$$

$P(C|A\cap B)=\frac{P(}{P(A\cap B)}$

مثال ۱.۱۸ احتمال اینکه یک دستگاه ایمنی که از پخش اشعه رادیواکتیو در یک کارخانه هسته‌ای جلوگیری می‌کند از کار بیفتد ۰/۰۰۳ است. ابتکاری در طرح ایمنی دستگاه به کار برده می‌شود، به این ترتیب که

هرگاه دستگاه ایمنی از کار بیفتد دستگاه اضطراری دیگری به طور اتوماتیک اشعه رادیواکتیو را متوقف می‌کند. احتمال اینکه این دستگاه از کار بیفتد ۰/۰۴ است. احتمال خطر پخش اشعه رادیواکتیو در کارخانه را حساب کنید.

حل: پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم

A : دستگاه ایمنی از کار بیفتد.

B : دستگاه اضطراری از کار بیفتد.

برای محاسبه احتمال موردنظر باید احتمال پیشامد $A \cap B$ را محاسبه کنیم. با توجه به قانون ضرب احتمال‌ها

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= ۰/۰۰۳ \times ۰/۰۴ \\ &= ۰/۰۰۰۱۲ \end{aligned}$$

?

مثال ۱.۱۹ جعبه‌ای شامل ۱۰ لامپ است که ۴تای آنها طول عمر کوتاه و بقیه طول عمر طولانی دارند. تعداد ۳ لامپ به طور پیاپی (بدون جایگذاری) از این جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه لامپ‌های اول و دوم طول عمر کوتاه داشته باشند و لامپ سوم طول عمر طولانی چقدر است؟

حل: پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم

A : طول عمر لامپ اول، کوتاه باشد.

B : طول عمر لامپ دوم، کوتاه باشد.

C : طول عمر لامپ سوم، طولانی‌باشد.

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

طبق قانون ضرب برای سه پیشامد

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B|A)P(C|A \cap B) \\ &= \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۳}{۹} \times \frac{۶}{۸} \\ &= ۰/۱ \end{aligned}$$

$P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$

استقلال پیشامدها

در بخش قبل گفتیم که گاهی اطلاع از رخداد یک پیشامد مانند B در احتمال رخداد یک پیشامد دیگر مانند A اثر می‌گذارد. اما این موضوع عمومیت ندارد. به عبارت دیگر در مواردی اطلاع از وقوع پیشامد B هیچ اثری در تعیین مقدار احتمال پیشامد A ندارد و لذا احتمال شرطی $P(A|B)$ برابر با احتمال غیر شرطی $P(A)$ است. در چنین حالتی گوییم A و B دو پیشامد مستقل از هم‌اند. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که شرط $P(A|B) = P(A)$ معادل است با شرط $P(B|A) = P(B)$ و نیز معادل است با شرط $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. بر این اساس تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

تعریف ۳.۱ دو پیشامد A و B را مستقل از هم گوییم اگر

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

مستقل

دو پیشامد را که مستقل از هم نباشند، دو پیشامد وابسته گوییم.

مثال ۲۰.۱ دو تاس سالم را پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای زیر را در نظر بگیرید

B : مجموع ۷ رو شود. $\qquad$ A : مجموع ۵ رو شود.

C : تاس اول ۴ رو شود.

آیا A و C مستقل از هم‌اند؟ آیا B و C مستقل از هم‌اند؟

حل: فضای نمونه ۳۶ عضو هم‌شانس دارد. به علاوه پیشامدهای A و B و C عبارت‌اند از

$$A = \{(۱,۴)(۲,۳)(۳,۲)(۴,۱)\}$$

$$B = \{(۱,۶)(۲,۵)(۳,۴)(۴,۳)(۵,۲)(۶,۱)\}$$

$$C = \{(۴,۱)(۴,۲)(۴,۳)(۴,۴)(۴,۵)(۴,۶)\}$$

و داریم

$$P(A) = \frac{۴}{۳۶}, \qquad P(B) = \frac{۶}{۳۶}, \qquad P(C) = \frac{۶}{۳۶},$$
$$P(A\cap C) = \frac{۱}{۳۶}, \quad P(B\cap C) = \frac{۱}{۳۶}$$

چون

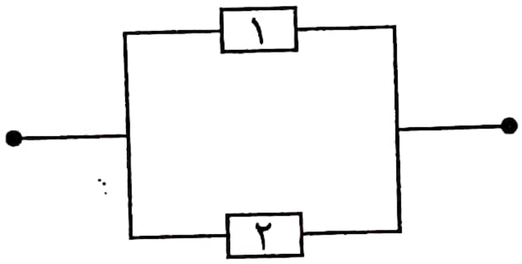
$$P(A\cap C) = \frac{۱}{۳۶} \neq P(A)P(C) = \frac{۴}{۳۶} \times \frac{۶}{۳۶} = \frac{۴}{۲۱۶}$$

پس A و C مستقل از هم نیستند. این امر به طور شهودی نیز واضح است. زیرا اگر تاس اول ۴ (یا کوچکتر از آن) رو شود، آنگاه امکان به دست آوردن مجموع ۵ هنوز وجود دارد. در حالی که اگر تاس اول ۵ (یا ۶) رو شود دیگر شانسی برای مجموع ۵ باقی نخواهد ماند. به عبارت دیگر به دست آوردن مجموع ۵ بستگی به برآمد تاس اول دارد. اما برای دو پیشامد B و C داریم

$$P(B \cap C) = \frac{۱}{۳۶} = P(B)P(C) = \frac{۶}{۳۶} \times \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۳۶}$$

پس B و C مستقل از هم‌اند. می‌توانید دلیل این استقلال را توضیح دهید؟

مثال ۲۱.۱ یک سیستم از دو واحد تشکیل شده است که مستقل از هم عمل می‌کنند و به طور موازی متصل شده‌اند:



در ۱۰ درصد اوقات واحد اول و در ۲۰ درصد اوقات واحد دوم خراب است. در چند درصد اوقات سیستم فعال است؟

حل: پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم

B : واحد دوم فعال است. A : واحد اول فعال است.

چون دو واحد به طور موازی متصل شده‌اند، فعال بودن سیستم معادل با فعال بودن دست‌کم یکی از واحدها است. احتمال این پیشامد برابر با $P(A \cup B)$ است. مقدار این احتمال بر پایه‌ی استقلال A و B چنین محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ &= ۰/۹۰ + ۰/۸۰ - ۰/۹۰ \times ۰/۸۰ = ۰/۹۸ \end{aligned}$$

نکته توجه داشته باشید که منظور از استقلال دو پیشامد A و B، استقلال آن‌ها تحت یک مدل احتمال است. ممکن است دو پیشامد در یک مدل احتمال مستقل باشند ولی در مدل احتمال دیگر وابسته باشند.

در مثال ۲۰.۱ (پرتاب دو تاس) چنانچه تاس‌ها سالم نبوده و پیشامدهای ساده همشانس نباشند (یعنی مدل احتمال تغییر کند) ممکن است دو پیشامد A و C مستقل شوند. نکته دیگر استقلال فیزیکی و رابطه آن با استقلال احتمالی است. با توجه به تعریف استقلال، اگر یک آزمایش مرکب از دو قسمت فیزیکی مستقل و نامربوط به هم باشد و پیشامدهای A و B به قسمت‌های جداگانه آن آزمایش مربوط شوند (مثال ۲۱.۱)، آنگاه می‌توانیم به پیشامد $A \cap B$ (هم A و هم B رخ دهند)، احتمال $P(A)P(B)$ را نسبت دهیم پس استقلال فیزیکی، استقلال احتمالی را نتیجه می‌دهد. اما باید توجه داشت که عکس آن همواره درست نیست (مثال بزنید).

هشدار گاهی اصطلاحات "دو پیشامد ناسازگار" و "دو پیشامد مستقل" با هم اشتباه گرفته می‌شوند. این دو خاصیت کاملاً متفاوتند. در واقع چنانچه A و B دو پیشامد با احتمال‌های مثبت باشند، برقراری یک خاصیت منجر می‌شود که دیگری نتواند برقرار باشد: اگر A و B مستقل باشند آنگاه $P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0$ و لذا A و B ناسازگار نیستند. از طرفی اگر A و B ناسازگار باشند، اشتراک آنها تهی است و $P(A \cap B) = 0$ پس A و B مستقل نخواهند بود زیرا تساوی $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ که طرف چپ آن صفر است، برقرار نیست. از اینها گذشته، استقلال یک مفهوم وابسته به مدل احتمال است (نکته بالا) در صورتی که ناسازگاری ارتباطی با مدل احتمال ندارد.

مفهوم استقلال را می‌توان به حالت بیش از دو پیشامد نیز تعمیم داد.

تعریف ۴.۱ پیشامدهای $A_1, A_2, \cdots, A_n$ را مستقل از هم گوییم اگر برای هر زیرمجموعه $A_{1'}, A_{2'}, \cdots, A_{k'}$ $(k \leq n)$ از این پیشامدها داشته باشیم

$$P(A_{1'} \cap A_{2'} \cap \cdots \cap A_{k'}) = P(A_{1'})P(A_{2'}) \cdots P(A_{k'})$$

در حالت خاص، سه پیشامد A و B و C مستقل‌اند اگر هر ۴ شرط زیر برقرار باشند

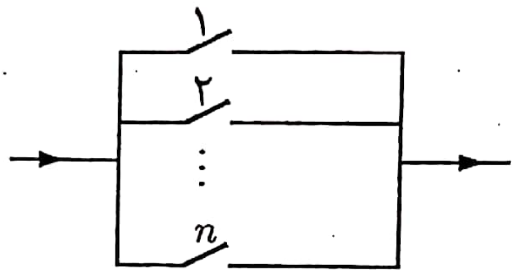
$$\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\
P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\
P(B \cap C) &= P(B)P(C) \\
P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C)
\end{aligned}$$

به آسانی ثابت می‌شود که اگر سه پیشامد A و B و C مستقل باشند آنگاه A از هر پیشامد ساخته شده

$P(A\cap(B\cup C)) = P(A) \cdot P(B\cup C)$, $P(A\cap(B\cup C)) = P((A\cap B)\cup(A\cap C)) = P(A\cap B) + P(A\cap C)$
$- P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) = P(A)[P(B)+P(C) - \overbrace{P(B)P(C)}^{P(B\cap C)}]$
$= P(A)P(B\cup C)$

از B و C مستقل خواهد بود (این نکته برای حالتی که دو پیشامد و یا بیش از سه پیشامد داریم نیز برقرار است). مثلاً در مشروط حالت استقلال A و B و C، پیشامدهای A و $\overline{B}$ و $\overline{C}$ نیز مستقل اند و پیشامدهای A و $B \cup C$ نیز مستقل‌اند ثابت کنید و ... .

مثال ۲۲.۱ یک سیستم مرکب از n واحد است که به طور موازی به هم متصل‌اند. اگر واحد iام مستقل از دیگر واحدها با احتمال P_i فعال باشد، احتمال اینکه سیستم عمل کند چقدر است؟



حل: فرض کنید A_i پیشامد فعال بودن واحد iام باشد، در این صورت

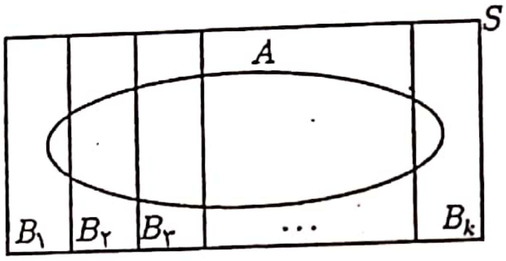
$$\begin{aligned} P(\text{سیستم عمل کند}) &= 1 - P(\text{سیستم عمل نکند}) \\ &= 1 - P(\text{هیچ واحدی فعال نباشد}) \\ &= 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n) \\ &= 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P_i) \end{aligned}$$

حاصل ضرب

۶.۱ قانون احتمال کل و قضیه بیز

همان‌طور که در آغاز بحث احتمال شرطی گفتیم، یکی از مهم‌ترین کاربردهای احتمال شرطی این است که می‌توان احتمال رخداد یک پیشامد پیچیده را با شرطی کردن روی پیشامدهای ساده‌تر محاسبه کرد. فرض کنید هدف، محاسبه احتمال پیشامد A باشد که مستقیماً و به سادگی میسر نیست. اگر فضای نمونه را بتوان به k پیشامد B_1 و ... و B_k افراز کرد (یعنی B_iها جدا از هم بوده و $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$) به طوری که مقادیر $P(B_i)$ و نیز احتمال‌های شرطی یعنی $P(A|B_i)$ها معلوم باشند، آنگاه می‌توان احتمال پیشامد A را به راحتی به دست آورد. توجه کنید که طبق روابط بین مجموعه‌ها داریم

$$A = A \cap S = A \cap (\bigcup_{i=1}^{k} B_i)$$
$$= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_k)$$



چون پیشامدهای $A \cap B_i$ جدا از هم هستند، پس طبق اصل سوم احتمال

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap B_i)$$

و سرانجام طبق اصل ضرب

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i) P(A|B_i)}$$

به فرمول بالا، قانون احتمال کل گفته می‌شود. به این تعبیر که اگر ممکن باشد که پیشامدی تحت شرایط (یا علل) مختلف و دو به دو ناسازگار رخ دهد، در این صورت فرمول فوق نشان می‌دهد که احتمال کل آن پیشامد چگونه مرکب از احتمال‌های شرایط مختلف است.

مثال ۲۳.۱ در کارخانه‌ای سه خط تولید ۱ و ۲ و ۳ وجود دارد که به ترتیب ۰/۴۵، ۰/۳۰ و ۰/۲۵ کالاها را تولید می‌کنند. درصد کالاهای غیر استاندارد این خطوط به ترتیب ۰/۱۰، ۰/۱۲ و ۰/۰۵ است. اگر کالایی از تولیدات این کارخانه برگزیده شود، احتمال اینکه غیراستاندارد باشد چقدر است؟

حل: در این مثال محاسبه احتمال مطلوب به طور مستقیم غیر ممکن است، اما با شرطی کردن روی خطوط تولید می‌توان مسئله را به آسانی حل کرد. به وضوح ۳ خط تولید که ۱۰۰% کالاها را تولید می‌کنند یک افراز مناسب برای این مسئله است. پیشامدهای زیر را در نظر می‌گیریم:

B_i : کالا، تولید شده توسط خط i ام است، $i = 1, 2, 3$ ،

A : کالا، غیراستاندارد است.

از اطلاعات مسئله داریم

$$P(B_۱) = ۰/۴۵ \quad P(A|B_۱) = ۰/۱۰$$

$$P(B_۲) = ۰/۳۰ \quad P(A|B_۲) = ۰/۱۲$$

$$P(B_۳) = ۰/۲۵ \quad P(A|B_۳) = ۰/۰۵$$

و طبق قانون احتمال کل، $P(A)$ یعنی احتمال غیراستاندارد بودن یک کالا عبارت است از

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_۱)P(A|B_۱) + P(B_۲)P(A|B_۲) + P(B_۳)P(A|B_۳) \\ &= (۰/۴۵ \times ۰/۱۰) + (۰/۳۰ \times ۰/۱۲) + (۰/۲۵ \times ۰/۰۵) \\ &= ۰/۰۹۴ \end{aligned}$$

$\rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - ۰/۰۹۴$

یعنی از هر ۱۰۰۰ کالای تولید شده در کارخانه، ۹۴ کالا غیراستاندارد است.

قضیه بیز

در مثال بالا فرض کنید کالای انتخابی غیراستاندارد باشد. آنگاه این سؤال پیش می‌آید که "احتمال آنکه این کالا محصول خط تولید iام باشد چقدر است؟" به عبارت دیگر $P(B_i|A)$ چقدر است؟ ملاحظه می‌کنید که آنچه از اطلاعات اولیه در اختیار داریم مقادیر $P(A|B_i)$ها می‌باشد در حالی که اکنون سؤال از $P(B_i|A)$ است. به منظور به دست آوردن فرمولی برای $P(B_i|A)$، می‌نویسیم

$$P(B_i|A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} \qquad \text{تعریف احتمال شرطی}$$

$$= \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)} \qquad \text{قانون ضرب احتمال‌ها}$$

حال با جایگذاری $P(A)$ از قانون احتمال کل به فرمول زیر می‌رسیم

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(B_j)P(A|B_j)}$$

فرمول فوق که موارد استفاده فراوانی دارد، به افتخار فیلسوف و کشیش انگلیسی توماس بیز (۱۷۶۱_۱۷۰۲)، به فرمول بیز مشهور است. مقادیر $P(B_i)$ را احتمال‌های پیشین (یعنی پیش از کسب اطلاعات و مشاهدات اضافی) و مقادیر $P(B_i|A)$ را احتمال‌های پسین می‌نامند. این مقادیر می‌توانند به ترتیب به عنوان درجه

اعتقاد ما به پیشامد B_i پیش از وقوع پیشامد A و پس از وقوع پیشامد A تلقی شوند. در عمل بهتر است ابتدا $P(A)$ را طبق قانون احتمال کل بیابیم و آنگاه مقدار آن را در فرمول بیز جایگذاری کنیم. برای محاسبه $P(A)$ نیز آنچه مهم است تشخیص و تشکیل افراز مناسب است.

مثال ۲۴.۱ در مثال بالا، چنانچه کالای انتخابی غیراستاندارد باشد، احتمال آنکه محصول خط تولید ۱ باشد چقدر است؟ احتمال آنکه محصول خط تولید ۲ باشد چقدر است؟ اگر کالا استاندارد باشد، احتمال آنکه محصول خط تولید ۱ باشد چقدر است؟

حل: طبق اطلاعات و نمادگذاری مثال ۲۳.۱ داریم

$$P(B_1|A) = P(\text{محصول خط تولید ۱ باشد}|\text{کالا غیر استاندارد باشد})$$

$$= \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{۰/۴۵ \times ۰/۱۰}{۰/۰۹۴} = ۰/۴۸$$

ستر :

$$P(B_2|A) = P(\text{محصول خط تولید ۲ باشد}|\text{کالا غیر استاندارد باشد})$$

$P(A'|B) = 1 - P(A|B)$ ✓

$$= \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{۰/۳۰ \times ۰/۱۲}{۰/۰۹۴} = ۰/۳۸$$

$P(B|A') = 1 - \cancel{P(B|A)}$

$$P(B_1|\overline{A}) = P(\text{محصول خط تولید ۱ باشد}|\text{کالا استاندارد باشد})$$

$$= \frac{P(B_1)P(\overline{A}|B_1)}{P(\overline{A})} = \frac{۰/۴۵ \times ۰/۹۰}{۰/۹۰۶} = ۰/۴۵$$

$1 - ۰/۰۹۴$

مثال ۲۵.۱ گمان می‌رود که آلودگی ناشی از یک کارخانه شیمیایی مانع رشد درختان در جنگل نزدیک به آن می‌شود. با توجه به تحقیقات قبلی، احساس می‌شود که $۰/۶ = P(\text{وجود آلودگی})$. همین‌طور معلوم شده است که $۰/۸ = P(\text{عدم رشد درخت}|\text{وجود آلودگی})$ و $۰/۲۵ = P(\text{عدم رشد درخت}|\text{عدم آلودگی})$. مطلوبست محاسبه $P(\text{وجود آلودگی}|\text{عدم رشد درخت})$.

حل: به وضوح وجود آلودگی و عدم وجود آلودگی یک افراز برای حالت‌های ممکن است. بر این پایه اطلاعات را صورت‌بندی می‌کنیم

B_1 : پیشامد وجود آلودگی $\qquad$ B_2 : پیشامد عدم آلودگی

A : پیشامد عدم رشد درخت

$P(\text{وجود آلودگی}|\text{عدم رشد}) = \frac{P(\text{عدم رشد}|\text{وجود آلودگی})P(\text{وجود آلودگی})}{P(A)} = ۰/۸(۰/۶)$

از اطلاعات مسئله داریم

$$P(B_1) = ۰/۶ \quad , \quad P(B_2) = ۰/۴$$

$$P(A|B_1) = ۰/۸ \quad . \quad P(A|B_2) = ۰/۲۵$$

$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B}) = ۰/۸(۰/۶) + ۰/۲۵(۰/۴)$

طبق قانون احتمال کل

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_۱)P(A|B_۱) + P(B_۲)P(A|B_۲) \\ &= (۰/۶ \times ۰/۸) + (۰/۴ \times ۰/۲۵) = ۰/۵۸ \end{aligned}$$

و طبق فرمول بیز

$$\begin{aligned} P(B_۱|A) &= \frac{P(B_۱)P(A|B_۱)}{P(A)} \\ &= \frac{۰/۶ \times ۰/۸}{۰/۵۸} = ۰/۸۳ \end{aligned}$$

مثال ۱.۲۶ علائم تلگرافی «نقطه: .» و «خط: -» به نسبت ۴ به ۳ فرستاده می‌شوند. به علت شرایطی که موجب اختلال در مخابره می‌شود، نقطه با احتمال $\frac{۱}{۵}$ بدل به خط می‌شود و خط با احتمال $\frac{۱}{۷}$ بدل به یک نقطه می‌گردد.

الف) چند درصد علامت‌ها به صورت نقطه دریافت می‌شوند؟

ب) اگر نقطه‌ای دریافت شود، احتمال اینکه واقعاً به عنوان یک نقطه فرستاده شده باشد، چقدر است؟

پ) اگر پیامی به صورت - - دریافت شود، احتمال اینکه واقعاً به همین صورت ارسال شده باشد، چقدر است؟

ت) فرض کنید علامتی از موقعیت هادی به موقعیت ناصر مخابره شده و سپس علامت دریافت شده به موقعیت ایرج مخابره می‌شود. اگر علامت دریافتی در موقعیت ایرج خط باشد، احتمال اینکه از ابتدا خط مخابره شده باشد، چقدر است؟

حل: الف) دو پیشامد «ارسال نقطه» و «ارسال خط» دو پیشامد متمم هستند که افراز مناسب را برای ارسال یک علامت تشکیل می‌دهند. پیشامدهای زیر را در نظر می‌گیریم

$B_۲$: علامت ارسالی خط است. $B_۱$: علامت ارسالی نقطه است.

A : علامت دریافتی نقطه است.

با توجه به اطلاعات مسئله داریم

$$P(B_۱) = \frac{۴}{۷} ، P(B_۲) = \frac{۳}{۷} ، P(A|B_۱) = \frac{۴}{۵} ، P(A|B_۲) = \frac{۱}{۷}$$

طبق قانون احتمال کل

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_۱)P(A|B_۱) + P(B_۲)P(A|B_۲) \\ &= (\frac{۴}{۷} \times \frac{۴}{۵}) + (\frac{۳}{۷} \times \frac{۱}{۷}) = ۰/۵۱۸ \end{aligned}$$

ب) صورت‌بندی قسمت الف در اینجا نیز به کار می‌آید. طبق قانون بیز

$$P(B_۱|A) = \frac{P(B_۱)P(A|B_۱)}{P(A)} = \frac{(\frac{۴}{۷} \times \frac{۴}{۵})}{۰/۵۱۸} = ۰/۸۸۳$$

پ) در این حالت افراز مناسب برای استفاده از قانون احتمال کل شامل چهار پیشامد به صورت زیر است

$B_۱$: علامت ارسالی ۰۰ است. $\quad P(B_۱) = \frac{۴}{۷} \times \frac{۴}{۷} = \frac{۱۶}{۴۹}$

$B_۲$: علامت ارسالی ـ۰ است. $\quad P(B_۲) = \frac{۴}{۷} \times \frac{۳}{۷} = \frac{۱۲}{۴۹}$

$B_۳$: علامت ارسالی ۰ـ است. $\quad P(B_۳) = \frac{۳}{۷} \times \frac{۴}{۷} = \frac{۱۲}{۴۹}$

$B_۴$: علامت ارسالی ـ ـ است. $\quad P(B_۴) = \frac{۳}{۷} \times \frac{۳}{۷} = \frac{۹}{۴۹}$

پیشامد دریافت پیام به صورت ـ ـ را با A نشان می‌دهیم. طبق اطلاعات مسئله

$$P(A|B_۱) = \frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۲۵} \quad P(A|B_۲) = \frac{۱}{۵} \times \frac{۶}{۷} = \frac{۶}{۳۵}$$
$$P(A|B_۳) = \frac{۶}{۷} \times \frac{۱}{۵} = \frac{۶}{۳۵} \quad P(A|B_۴) = \frac{۶}{۷} \times \frac{۶}{۷} = \frac{۳۶}{۴۹}$$

و لذا طبق قانون احتمال کل

$$\begin{aligned} P(A) = \sum_{j=۱}^{۴} P(B_j)P(A|B_j) &= (\frac{۱۶}{۴۹} \times \frac{۱}{۲۵}) + (\frac{۱۲}{۴۹} \times \frac{۶}{۳۵}) + (\frac{۱۲}{۴۹} \times \frac{۶}{۳۵}) + (\frac{۹}{۴۹} \times \frac{۳۶}{۴۹}) \\ &= ۰/۲۳۲ \end{aligned}$$

و سرانجام طبق قانون بیز

$$P(B_۴|A) = P(\text{ارسال علامت به صورت ـ ـ} \,|\, \text{دریافت علامت به صورت ـ ـ})$$
$$= \frac{P(B_۴)P(A|B_۴)}{P(A)} = \frac{۰/۱۳۵}{۰/۲۳۲} = ۰/۵۸۲$$

ت) جدول زیر حالات مختلف ارسال و دریافت علامت را نشان می‌دهد.

موقعیت ایرج	موقعیت ناصر	موقعیت هادی
.	.	.
—	.	.
.	—	.
—	—	.
.	.	—
—	.	—
.	—	—
—	—	—

پس یک افراز مناسب، شامل چهار پیشامد زیر برحسب ارسال از موقعیت هادی و سپس دریافت و ارسال مجدد از موقعیت ناصر است

$P(B_۱) = \frac{۴}{۷} \times \frac{۴}{۵}$ $B_۱$: پیشامد ارسال • و دریافت و ارسال مجدد •

$P(B_۲) = \frac{۴}{۷} \times \frac{۱}{۵}$ $B_۲$: پیشامد ارسال • و دریافت و ارسال مجدد ـ

$P(B_۳) = \frac{۳}{۷} \times \frac{۱}{۷}$ $B_۳$: پیشامد ارسال ـ و دریافت و ارسال مجدد •

$P(B_۴) = \frac{۳}{۷} \times \frac{۶}{۷}$ $B_۴$: پیشامد ارسال ـ و دریافت و ارسال مجدد ـ

اگر پیشامد A را دریافت علامت ـ در موقعیت ایرج بگیریم، طبق اطلاعات مسئله داریم

$$P(A|B_۱) = \frac{۱}{۵} \quad , \quad P(A|B_۲) = \frac{۶}{۷} \quad , \quad P(A|B_۳) = \frac{۱}{۵} \quad , \quad P(A|B_۴) = \frac{۶}{۷}$$

بر اساس قانون احتمال کل

$$P(A) = \sum_{j=۱}^{۴} P(B_j)P(A|B_j) = (\frac{۱۶}{۳۵} \times \frac{۱}{۵}) + (\frac{۴}{۳۵} \times \frac{۶}{۷}) + (\frac{۳}{۲۱} \times \frac{۱}{۵}) + (\frac{۱۸}{۴۹} \times \frac{۶}{۷})$$
$$= ۰/۵۳۳$$

و سرانجام با توجه به دو حالت ممکن و طبق قانون بیز

$P($علامت دریافتی خط است|علامت ارسالی از ابتدا خط بوده باشد$)$

$$= P(B_۳|A) + P(B_۴|A)$$
$$= \frac{P(B_۳)P(A|B_۳) + P(B_۴)P(A|B_۴)}{P(A)} = \frac{۰/۳۲۷}{۰/۵۳۳} = ۰/۶۱$$

مثال ۲۷.۱ ذخیره گاز در یک منطقه ساحلی مورد توجه است. طبق اطلاعات قبلی، احتمال‌های اینکه این منطقه دارای ذخیره اندک گاز باشد ($A_۱$)، دارای ذخیره متوسط گاز باشد ($A_۲$)، یا دارای ذخیره زیاد

گاز باشد ($A_۳$) به ترتیب ۰/۷ و ۰/۲۵ و ۰/۰۵ برآورد می‌شود. یک چاه آزمایشی که در منطقه حفر خواهد شود با احتمال ۰/۱۰ به گاز می‌رسد (B)، اگر منطقه دارای ذخیره اندک گاز باشد. این احتمال در حالت‌هایی که منطقه دارای ذخیره متوسط یا زیاد گاز باشد به ترتیب برابر ۰/۴۰ و ۰/۹۰ است. فرض کنید که یک چاه آزمایشی حفر شده در منطقه به گاز رسیده است. توزیع احتمال پسین حجم ذخیره گاز موجود را به دست آورید.

حل: برای محاسبه احتمال پسین هر حالت، باید از فرمول احتمال کل و فرمول بیز استفاده کرد. محاسبات را طبق این دو فرمول انجام داده و نتایج را به طور ساده و فشرده در جدول ۵.۱ درج نموده‌ایم.

جدول ۵.۱ محاسبه احتمال‌های پسین، بر پایه‌ی فرمول بیز

(۱) ذخیره گاز A_i	(۲) احتمال پیشین $P(A_i)$	(۳) $P(B\|A_i)$	(۴) احتمال توام $P(A_i \cap B)$ (۲) × (۳)	(۵) احتمال پسین $P(A_i\|B)$ (۴) ÷ ۰/۲۱۵
$A_۱$: ذخیره اندک	۰/۷۰	۰/۱۰	۰/۰۷۰	۰/۳۲۶
$A_۲$: ذخیره متوسط	۰/۲۵	۰/۴۰	۰/۱۰۰	۰/۴۶۵
$A_۳$: ذخیره زیاد	۰/۰۵	۰/۹۰	۰/۰۴۵	۰/۲۰۹
مجموع	۱		۰/۲۱۵	۱

در جدول ۵.۱، ستون ۲ شامل احتمال‌های پیشین حجم ذخیره گاز است. ستون ۳ احتمال‌های شرطی رسیدن به گاز در حالت‌های مختلف را نشان می‌دهد. ستون ۴ معرف احتمال‌های توأم $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i)$ است. مجموع اعداد این ستون، طبق قانون احتمال کل، مقدار $P(B)$ را می‌دهد که همان مخرج فرمول بیز است. سرانجام در ستون ۵، احتمال پسین هر حالت از ذخیره گاز را به شرط رسیدن چاه آزمایشی به گاز ارائه می‌دهد. مثلاً احتمال اینکه حجم ذخیره گاز در منطقه زیاد باشد به شرط اینکه چاه آزمایشی به گاز برسد برابر است با

$$P(A_۳|B) = \frac{۰/۰۴۵}{۰/۲۱۵} = ۰/۲۰۹$$

توجه کنید که مقدار احتمال پسین یعنی $P(A_۲|B)$ تفاوت بسیاری با مقدار احتمال پیشین یعنی $P(A_۲)$ دارد. در واقع احتمال پسین $A_۲$ بیش از ۴ برابر بزرگتر از احتمال پیشین $A_۲$ است.

تمرین‌های فصل اول

۱.۱ فضای نمونه هریک از آزمایش‌های زیر را مشخص کنید

الف) یک سفینه فضایی درجه حرارت اطراف سیاره‌ای را در ۵۰ کیلومتری آن و در ساعت ۲ بعدازظهر دوشنبه آینده اندازه می‌گیرد.

ب) ۲۰ نفر در یک آزمون شرکت می‌کنند و افراد موفق به یک پایه ارتقاء نائل می‌شوند.

پ) در تحقیقی راجع به بیکاری، از هزار نفر می‌خواهند که جواب «بله» یا «خیر» به سؤال «آیا شما شاغل هستید؟» بدهند. تنها جواب‌های خیر یادداشت می‌شوند.

ت) یک محقق ژئوفیزیک مایل به تعیین حجم ذخیره گاز طبیعی در منطقه معینی است. مقدار حجم برحسب متر مکعب داده می‌شود.

۲.۱ این پیشامدها را در تمرین بالا مشخص کنید

الف) درجه حرارت کمتر از ۴۰°.

ب) موفقیت دست‌کم نیمی از افراد در آزمون.

پ) درصد بیکاران، ۵/۵% یا کمتر.

ت) بین یک تا دو میلیون متر مکعب.

۳.۱ فرض کنید E و F و G سه پیشامد باشند. عبارتی برای پیشامدهایی بر حسب E، F و G پیدا کنید، به طوری که

الف) فقط E رخ دهد،

ب) E و G رخ دهند اما F رخ ندهد،

پ) حداقل دو پیشامد رخ دهند،

ت) هر سه پیشامد رخ دهند،

ث) حداکثر دو پیشامد رخ دهند،

ج) دقیقاً دو پیشامد رخ دهند.

۴.۱ از سه پیشامد A، B و C پیشامدهای A و B مستقل‌اند و پیشامدهای B و C ناسازگارند. احتمال هریک از این پیشامدها عبارت‌اند از $P(A) = ۰/۵$، $P(B) = ۰/۳$ و $P(C) = ۰/۱$. پیشامدهای زیر را به صورت مجموعه‌ها بنویسید و احتمال هریک از آنها را محاسبه کنید

الف) B و C رخ دهند، $P(A \cap B)$

ب) دست‌کم یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد، $P(A \cup B) =$

پ) B رخ ندهد، $P(B') = 1 - P(B)$

ت) هر سه پیشامد رخ دهند. $P(A \cap B \cap C)$

۵.۱ یک کارخانه ۷ نفر تکنسین با شرایط لازم جهت به کار انداختن یک ماشین، که برای هر نوبت کار سه متصدی لازم دارد، دارا می‌باشد.

الف) به چند روش می‌توان گروه سه نفری را تعیین کرد؟

ب) هر نفر در چند گروه سه نفری می‌تواند عضو باشد؟

۶.۱ از ۷ مرد و ۴ زن، چند کمیته ۵ نفره می‌توان انتخاب کرد مرکب از:

الف) سه مرد و دو زن،

ب) حداقل ۳ زن.

۷.۱ زیست‌شناسی می‌خواهد مکانیسم دمای داخلی بدن یک نوع ماهی را مطالعه کند. برای این هدف، در مخزنی که به دو قسمت تقسیم شده است ۳ دمای بالا را در نصف مخزن و ۲ دمای پایین را در نصف دیگر آن آزمون می‌کند. چند زوج دما را باید آزمون کند؟

۸.۱ کشاورزی می‌خواهد حاصل سه نوع بذر مختلف را در ۴ محل متفاوت مطالعه کند. چند قطعه زمین لازم است تا هر ترکیب از انواع بذر و محل، تنها در یک قطعه زمین آزمایش شود؟ چند قطعه زمین لازم است تا هر ترکیب بطور تکراری در هر چهار قطعه آزمایش شود؟

۹.۱ یک واگن راه‌آهن دارای ۱۰ صندلی رو به عقب و ۱۲ صندلی رو به جلو می‌باشد. به چند طریق مختلف ۱۰ مسافر می‌توانند روی صندلی‌ها بنشینند، به شرطی که دو نفر از آنها از نشستن روی صندلی‌های رو به جلو و ۴ نفر از نشستن روی صندلی‌های رو به عقب امتناع ورزند؟

۱۰.۱ به چند ترتیب مختلف ۸ نفر می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند، به شرطی که سه نفر آنها اصرار در نشستن کنار همدیگر داشته باشند؟

۱۱.۱ واژه‌ای مقلوب مستوی نامیده می‌شود که از چپ به راست و از راست به چپ یک جور خوانده شود. چند مقلوب مستوی هفت حرفی با به کارگیری الفبای فارسی می‌توان ساخت؟

۱۲.۱ ۱۰ صندلی در یک ردیف قرار گرفته‌اند.

الف) به چند طریق دو نفر می‌توانند روی دو صندلی بنشینند؟

ب) در چند مرتبه از حالات ممکن، دو نفر در کنار همدیگر می‌نشینند؟

پ) در چند حالت، این دو نفر دست‌کم یک صندلی با هم فاصله دارند؟

۱۳.۱ پارچه‌ای به شش ناحیه کنار هم تقسیم شده است. قرار است هریک از این شش ناحیه با استفاده از یک رنگ از چهار رنگ متمایز، رنگ‌آمیزی شود. این کار به چند روش شدنی است؟

۱۴.۱ فرض کنید که ۲۰ نوع ماده غذایی برای درست کردن پیتزا موجود است.

الف) چند نوع پیتزای مختلف می‌توان درست کرد با

۱. دقیقاً یک نوع ماده غذایی،

۲. دقیقاً دو نوع ماده غذایی،

۳. دقیقاً سه نوع ماده غذایی.

ب) به قسمت الف در حالتی جواب دهید که دو نیمه‌ی یک پیتزا بتوانند متفاوت باشند.

۱۵.۱ الف) به چند روش می‌توان الگوی

$$\begin{array}{ccccc} & & x & & \\ x & x & x & x & x \\ & & x & & \\ & & x & & \\ & & x & & \end{array}$$

را با ۰ و ۱ بسازیم؟

ب) چند تا از این الگوها نسبت به محور عمودی متقارن هستند؟

۱۶.۱ به چند طریق یک پدر می‌تواند ۷ هدیه متفاوت را میان سه فرزند خود تقسیم کند، اگر فرزند بزرگتر قرار باشد ۳ هدیه بگیرد و دو فرزند دیگر هرکدام ۲ هدیه دریافت کنند؟

$\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!}$

۱۷.۱ رقم‌های چند عدد n رقمی به ترتیب غیر کاهشی است؟ ترجه دارید که رقم نخست باید غیر صفر باشد.

۱۸.۱ به چند روش می‌توان دو عدد صحیح از بین عددهای صحیح ۱،۲،...،۱۰۰۰ انتخاب کرد به گونه‌ای که تفاضل آنها دقیقاً هفت باشد؟

۱۹.۱ الف) به چند شیوه می‌توان دو مربع مجاور از صفحه‌ی شطرنج انتخاب کرد؟

ب) به چند روش می‌توان دو مربع از صفحه‌ی شطرنج انتخاب کرد به گونه‌ای که در یک سطر یا ستون نباشند؟

پ) تعداد حالات حرکت یک رخ از گوشه‌ی جنوب غربی به گوشه‌ی شمال شرقی را تعیین کنید، تحت این فرض که حرکت‌ها منحصر به افقی-شرقی و عمودی-شمالی باشند.

۲۰.۱ می‌خواهیم از بین ۸۰ نهال دو دسته ۱۰تایی انتخاب کنیم. این کار به چند روش شدنی است، اگر بخواهیم بلندترین نهال گروه نخست کوتاهتر از کوتاهترین نهال گروه دوم باشد؟

۲۱.۱ احتمال‌های زیر را برای دو پیشامد A و B داریم

$$P(A) = \frac{۱}{۲} \quad , \quad P(B) = \frac{۱}{۴} \quad , \quad P(A|B) = \frac{۱}{۳}$$

مطلوب است محاسبه $P(A \cup B)$، $P(B|A)$ و $P(B|A^c)$.

۲۲.۱ در یک بررسی برای شناخت عامل تولید سرطان، ۹ موش در دسترس است که ۴ تا از آنها را به عنوان گروه شاهد نگه می‌دارند و به ۵ موش باقیمانده ماده موردنظر خورانده می‌شود.

الف) به چند روش می‌توان گروه شاهد را انتخاب کرد؟

ب) اگر همه‌ی گزینش‌ها همشانس باشند، احتمال اینکه موش معینی در گروه شاهد قرار گیرد، چقدر است؟

۲۳.۱ برای انتخاب اعضای هیأت منصفه در یک دادگاه، از بین فهرست افراد واجد شرایط مرکب از ۱۰ مرد و ۷ زن، قاضی ۵ نفر را برمی‌گزینند. فرض کنید هر ۵ نفر مرد باشند. آیا می‌توان نتیجه گرفت که: "زنان مورد تبعیض قرار گرفته‌اند"؟ برای پاسخگویی به این سؤال، احتمال این پیشامد را به دست آورید: "هیچ زنی عضو هیأت منصفه نباشد، در صورتی که گزینش اعضا به طور تصادفی انجام گیرد."

۲۴.۱ در استان کردستان تعداد ۷۴۶ کارگاه تولیدی وجود دارد. تعداد کارگران هر کارگاه داده شده است. شرح دهید که چگونه می‌توانید با استفاده از عددهای تصادفی ۸ کارگاه را انتخاب کنید به گونه‌ای که احتمال انتخاب هر کارگاه متناسب با تعداد کارگران آن باشد.

۲۵.۱ فردی به تصادف یکی از اعداد ۲، ۳ یا ۴ را اختیار کرده و سپس به تعداد رقمی که اختیار کرده تاس می‌ریزد. احتمال اینکه مجموع ۵ بیاورد چقدر است؟

۲۶.۱ الف) یک تاس پی‌درپی ریخته می‌شود. احتمال آمدن یک شش قبل از آمدن پنج چقدر است؟

ب) دو تاس پی‌درپی ریخته می‌شوند. احتمال آمدن مجموع ۹ قبل از آمدن مجموع ۶ چقدر است؟

۲۷.۱ گروهی شامل ۵ پسر و ۱۰ دختر به تصادف در یک صف قرار می‌گیرند.

الف) چقدر احتمال دارد شخصی که در موقعیت چهارم قرار می‌گیرد پسر باشد؟

ب) احتمال اینکه یک پسر مشخص در موقعیت چهارم قرار گیرد چیست؟

۲۸.۱ نگهبانی دارای n کلید است که یکی از آنها درب را باز می‌کند. اگر کلیدها را به طور تصادفی امتحان کند و آنهایی که درب را باز نمی‌کنند کنار بگذارد، چقدر احتمال دارد که در kامین امتحان درب را باز کند؟

۲۹.۱ فرض کنید هر بچه‌ای که به دنیا می‌آید شانس پسر یا دختر بودن وی مساوی و مستقل از جنسیت دیگر بچه‌ها در خانواده باشد. برای زوجی که ۵ بچه دارند، احتمال پیشامدهای زیر را حساب کنید.

الف) تمام بچه‌ها از یک جنس باشند،

ب) سه بچه‌ی کوچکتر پسر و بقیه دختر باشند،

پ) دو بچه‌ی بزرگتر پسر باشند،

ت) دست‌کم یک دختر وجود داشته باشد.

۳۰.۱ . دوازده توپ که چهارتای آنها سفید هستند در یک کیسه وجود دارد. سه بازیکن A و B و C به ترتیب (با جایگذاری) از کیسه توپ بیرون می‌آورند: اول A، بعد B و سپس C و به همین ترتیب. برنده نخستین کسی است که توپ سفید بیرون بکشد. احتمال برنده شدن B را بیابید. مسئله را برای حالت بدون جایگذاری نیز حل کنید.

۳۱.۱ قرار است ۸ کارگر بین ۴ کارگاه تقسیم شوند. چند تقسیم امکان‌پذیر است؟ چند تقسیم امکان‌پذیر است اگر لازم باشد به هر کارگاه ۲ کارگر تخصیص داد؟

۳۲.۱ الف) نشان دهید که شمار روش‌های قرار دادن r توپ غیر متمایز در n جعبه متمایز $(n \leq r)$، با این شرط که جعبه‌ای خالی نماند، برابر C_{n-1}^{r-1} است.

ب) قرار است یک تکنسین جهت تعمیر یک ماشین ۱۵ ساعت در دوره‌ای ۵ روزه اضافه کاری کند، به گونه‌ای که هر روز دست‌کم یک ساعت کار کند. به چند روش می‌توان برنامه‌ی او را تنظیم کرد؟

پ) به چند روش می‌توان r توپ غیر متمایز را در n جعبه‌ی متمایز به گونه‌ای قرار داد که در هر جعبه

$$P(\text{اول سیاه} \mid \text{دوم قرمز}) = \frac{P(\text{اول سیاه})\,P(\text{دوم قرمز} \mid \text{اول سیاه})}{P(\text{دوم قرمز})} = \frac{r}{b+c+r} \times \frac{b}{b+r}$$

$$P(\text{دوم قرمز}) = P(\text{دوم قرمز} \mid \text{اول سیاه})\,P(\text{اول سیاه}) + P(\text{دوم قرمز} \mid \text{اول قرمز})\,P(\text{اول قرمز})$$

دست‌کم ۲ توپ قرار گیرد؟ ($2n \le r$)

$$= \frac{rb}{rb + r(r+c)}$$

ت) بند ب را دوباره و با این فرض حل کنید که تکنسین هر روز دست‌کم ۲ ساعت کار کند.

$$= \frac{r}{b+c+r} \times \frac{b}{b+r} + \frac{r+c}{b+c+r} \times \frac{r}{b+r} = \frac{rb + (r+c)r}{(b+r)(b+c+r)}$$

۳۳.۱ دو تاس را n بار به دنبال هم پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه جفت ۶ دست‌کم یک‌بار ظاهر شود، چقدر است؟ n چه اندازه باشد تا این احتمال حداقل $\frac{1}{2}$ گردد.

۳۴.۱ یک گروه شامل ۶ مرد و ۶ زن به طور تصادفی به دو گروه ۶ نفری تقسیم شده‌اند. احتمال آنکه هر گروه دارای تعداد مساوی مرد باشد، چیست؟

۳۵.۱ یک گنجه حاوی ۱۰ جفت کفش است. اگر ۸ لنگه کفش به طور تصادفی انتخاب شود، احتمال اینکه (الف) هیچ جفت کامل، (ب) دقیقاً یک جفت کامل وجود داشته باشد، چیست؟

۳۶.۱ یک کیسه شامل b توپ سیاه و r توپ قرمز است. یکی از توپ‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و همراه با c توپ دیگر از همان رنگ به کیسه برمی‌گردانیم. سپس توپ دیگری را انتخاب می‌کنیم. نشان دهید احتمال اینکه توپ اول سیاه بوده باشد، به شرطی که توپ دوم قرمز بوده برابر $\frac{b}{b+r+c}$ است.

۳۷.۱ ناصر، بهرام، علی و محسن یک گروه تشکیل داده‌اند که چهار وسیله موسیقی؛ نی، کمانچه، تار و تنبک در آن گروه نواخته می‌شود. در صورتی که هر کدام از آنها توانایی نواختن هر چهار وسیله را داشته باشند، چند آرایش متفاوت می‌توان تشکیل داد؟ در صورتی که ناصر و محسن بتوانند هر چهار وسیله را بنوازند ولی بهرام و علی فقط نی و کمانچه بزنند، نتیجه چه خواهد بود؟

۳۸.۱ یک دانشجو باید به ۷ سؤال از ۱۰ سؤال یک امتحان پاسخ دهد. چند انتخاب خواهد داشت؟ اگر او مجبور باشد حداقل به سه سؤال از ۵ سؤال اول پاسخ دهد، چند انتخاب دارد؟

۳۹.۱ به چند روش می‌توان ۸ نفر را در گروه‌هایی توزیع کرد به گونه‌ای که هر گروه شامل دست‌کم دو نفر باشد؟

۴۰.۱ کیسه‌ای محتوی ۴ توپ قرمز و ۳ توپ سیاه است.

الف) ۵ توپ به صورت پی‌درپی با جایگذاری از کیسه استخراج می‌نماییم. احتمال اینکه دو توپ قرمز و سه توپ سبز استخراج کنیم، چقدر است؟

ب) بند الف را در حالت بدون جایگذاری حل نمایید.

۴۱.۱ آزمایش‌هایی که برای کشف یک بیماری معین به کار می‌رود، ۹۰% مؤثر هستند. در ۱۰% حالات این آزمایش‌ها در تشخیص بیماری موفق نیستند. در اشخاص غیر مبتلا، این آزمایش‌ها ۱% افراد را مبتلا و

$P(B \mid \bar{A})$

A واقعاً بیمار ، $\bar{A}$ بیمار نباشد
B_0 : آزمایش طرف + باشد

$$P(\text{واقعاً بیمار} \mid \text{آزمایش} +) = P(A|B_0) = \frac{P(B_0|A)\,P(A)}{P(B_0)} = \frac{\frac{99}{100}\times\frac{2}{100}}{\frac{296}{10000}} = \frac{198}{296}$$

$$P(B_0) = P(B_0|A)P(A) + P(B_0|\bar{A})P(\bar{A}) = \frac{99}{100}\times\frac{2}{100} + \frac{1}{100}\times\frac{98}{100} = \frac{296}{10000}$$

۹۹٪ را سالم نشان می‌دهند. از یک جمعیت زیاد که فقط ۲٪ آنها مریض هستند، یک نفر انتخاب شده و بعد از انجام آزمایش نشانه‌ی بیماری در او مشاهده می‌گردد. احتمال اینکه وی واقعاً بیمار باشد چقدر است؟ $\rightarrow P(\bar{B}|\bar{A})$

۴۲.۱ ذره‌ای روی خط از مبدأ شروع کرده و روی خط یک واحد به راست یا چپ، هریک با احتمال $\frac{1}{2}$، حرکت می‌کند. حرکت‌های متوالی مستقل فرض می‌شوند. فرض کنید Y_n نشان دهنده موقعیت ذره پس از n حرکت باشد. احتمال‌های زیر را برای $n = 1, 2, 3, 4$ پیدا کنید.

الف) $P(Y_n \geq 0)$،

ب) $P(|Y_n| \leq 2)$،

پ) $P(Y_n \geq 0 | Y_2 = 0)$.

۴۳.۱ کارخانه‌ای دارای دو واحد یکی در شهر و یکی در روستا است. در هر یک سال احتمال اینکه واحد شهری مورد دستبرد قرار گیرد ۵٪، و احتمال اینکه واحد روستا مورد سرقت قرار گیرد ۳٪ می‌باشد. برای هر یک سال احتمال اینکه

الف) هر دو کارخانه مورد دستبرد قرار گیرند، چقدر است؟

ب) یکی (یا دیگری ولی نه هر دو) مورد سرقت قرار گیرند، چقدر است؟

پ) هیچکدام مورد دستبرد قرار نگیرند، چقدر است؟

۴۴.۱ شورای یک شهر شامل ۹ عضو است. چهار عضو شورا محافظه‌کار و بقیه اصلاح‌طلب هستند. قرار است یک هیأت نمایندگی چهار نفری به تصادف انتخاب شود:

الف) چند هیأت مختلف می‌توان تشکیل داد؟

ب) احتمال اینکه هیأت همگی از محافظه‌کاران تشکیل شود، چقدر است؟

پ) احتمال اینکه دست‌کم یک محافظه‌کار در هیأت باشد، چقدر است؟

۴۵.۱ مجله‌ای تصاویر چهار هنرپیشه سینما و همچنین تصاویر کودکی آنها را به طور درهم نشان می‌دهد. این احتمال را بیابید که یکی از خوانندگان مجله، صرفاً برحسب تطبیق تصادفی، دست‌کم دو تصویر هنرپیشه‌ای را به درستی کنار هم بگذارد.

۴۶.۱ یک شرکت بیمه افراد جامعه‌ای را به یکی از سه گروه تقسیم‌بندی می‌کند: کم مخاطره B_1، با مخاطره متوسط B_2 و پر مخاطره B_3. اطلاعات پیشین نشان می‌دهد، احتمال اینکه یک شخص کم مخاطره، با مخاطره متوسط و پر مخاطره در طول یک سال در معرض حادثه‌ای قرار گیرد، به ترتیب، برابر ۰/۰۵، ۰/۱۵ و

$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$ A: پیش‌درتصادف یک فرد

(الف) $= \frac{5}{100} \times \frac{20}{100} + \frac{15}{100} \times \frac{50}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{175}{1000}$

۰/۳۰ است. اگر ۲۰٪ افراد جامعه کم مخاطره، ۵۰٪ با مخاطره متوسط و ۳۰٪ پر مخاطره باشند، چه درصدی از جامعه در طول یک سال تصادف خواهند داشت؟ اگر بیمه‌گذار الف هیچ تصادفی در یک سال نداشته باشد، احتمال اینکه او یک شخص پر مخاطره باشد چقدر است؟

$P(B_3|A') = \frac{P(A'|B_3)P(B_3)}{1-P(A)} = \frac{\frac{70}{100} \times \frac{30}{100}}{1-P(A)} = \frac{210}{825}$

۴۷.۱ در پروازی از تهران به تریست (شهری در شمال شرقی ایتالیا) چمدان سعید همراه با وی به مقصد نرسید. این چمدان سه بار از هواپیمایی به هواپیمایی منتقل شد. احتمال این که نقل و انتقالات به موقع و درست انجام نشوند به ترتیب برای سه انتقال برابر $\frac{۴}{۱۰}$، $\frac{۲}{۱۰}$ و $\frac{۱}{۱۰}$ برآورد می‌شود. احتمال اینکه اشکال از طرف اولین پرواز بوده باشد، چقدر است؟

۴۸.۱ شخصی در چهار امتحان شرکت می‌کند. احتمال قبول شدن او در امتحان اول p و احتمال قبول شدن او در هریک از امتحانات بعدی p یا $\frac{p}{۲}$ است بسته به اینکه وی در امتحان قبلی قبول یا رد شود. در صورتی که وی حداقل در سه امتحان قبول شود، واجد شرایط شناخته می‌شود. شانس وی برای اینکه واجد شرایط شناخته شود، چقدر است؟

۴۹.۱ احتمال اینکه یک تخم‌مرغ نطفه‌دار جوجه شود $\frac{۱۱}{۱۲}$ است. سه تخم‌مرغ برای جوجه‌کشی از یک جعبه ۱۲ عددی تخم‌مرغ که ۴ عدد آنها نطفه‌دار و ۸ عددشان بدون نطفه می‌باشد، برداشته می‌شود. احتمال اینکه از این تخم‌مرغ‌ها جوجه‌ای به دست آید، چقدر است؟

۵۰.۱ سه تک تیرانداز هدفی را بترتیب با احتمال‌های $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۳}{۴}$ مورد اصابت قرار می‌دهند. آنها همزمان شلیک می‌کنند و دو تیر به هدف می‌خورد. تیر کدامیک به خطا رفته است؟

۵۱.۱ ماهواره‌ای دارای ۳ منبع انرژی خورشیدی است، که همه آنها باید فعال باشند تا انرژی کافی فراهم آید. این منابع بطور مستقل از یکدیگر عمل می‌کنند. احتمال اینکه یک منبع در مدت مأموریت از کار بیفتد برابر با ۰/۰۲ است. احتمال اینکه انرژی کافی در مدت زمان مأموریت وجود داشته باشد، چقدر است؟ (این احتمال را قابلیت اعتماد سیستم می‌نامند.)

۵۲.۱ در جنگلی ۲۵ گوزن از نژاد بخصوصی وجود دارد. پنج تا از آنها را می‌گیریم و پس از نشاندار کردن آنها رهایشان می‌کنیم. بعد از مدتی، دوباره، ۶ تا از آنها را می‌گیریم. احتمال اینکه ۲ گوزن از ۶ گوزن انتخاب شده نشاندار باشند، چقدر است؟ برای حل مسئله چه فرضهایی لازم است؟ (معمولاً در جنگل‌ها تعداد حیوانات نامعلوم است، و برای برآورد آن از روش‌هایی مانند آنچه گفته شد استفاده می‌کنند.)

۵۳.۱ یک نوع پوشاک از به هم دوختن ۳ قطعه از پارچه A و ۲ قطعه از پارچه B تشکیل می‌شود. ۲٪

Scanned with CamScanner

از قطعات پارچه نوع A و ۳٪ از قطعات پارچه نوع B دارای لکه هستند. چنانچه یک پوشاک دارای دو یا تعداد بیشتری لکه باشد، مورد قبول واقع نخواهد شد. در صورتی که قطعات به صورت تصادفی انتخاب و به هم دوخته شوند، چه نسبتی از پوشاک‌ها رد خواهند شد؟

۵۴.۱ بر پایه تجربیات پیشین می‌توان مدعی شد که احتمال موفقیت (دستیابی به نفت) در یک عملیات حفاری برای اکتشاف نفت که در منطقه‌ای از خوزستان انجام می‌شود، ۰/۰۵ است. فرض کنید که احتمال رسیدن به صخره وقتی در زیر آن نفت باشد برابر ۰/۸ و احتمال رسیدن به صخره وقتی زیر آن نفت نیست برابر ۰/۵ باشد. اگر در محل یک حفاری صخره وجود داشته باشد، شانس رسیدن به نفت چقدر است؟

۵۵.۱ درصد گروه‌های خونی A، B، O و AB در یک جامعه بسیار بزرگ به ترتیب ۴۰٪، ۲۰٪، ۳۰٪ و ۱۰٪ برآورد شده است. سه نفر به طور مستقل از جمعیت فوق انتخاب می‌شوند. احتمال پیشامدهای زیر را حساب کنید.

الف) گروه خونی هر سه AB باشد،

ب) هرسه دارای گروه خونی یکسانی باشند،

پ) گروه خونی هر سه با هم فرق کند.

۵۶.۱ ظرف A شامل ۵ توپ قرمز، ظرف B شامل ۴ توپ قرمز و ۸ توپ سیاه، و ظرف C شامل ۳ توپ قرمز و ۶ توپ سیاه است. توپی از ظرف A انتخاب و داخل ظرف B قرار می‌دهیم. سپس توپی را از ظرف B برداشته و آن را در ظرف C قرار می‌دهیم. سرانجام از ظرف C یک توپ استخراج می‌کنیم. احتمال اینکه توپ اخیر قرمز باشد، چقدر است؟

۵۷.۱ از بین ۶ زوج دو نفر به تصادف انتخاب می‌شوند.

الف) احتمال اینکه این دو نفر زن و شوهر باشند، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه یک نفر مرد و دیگری زن باشد، چقدر است؟

۴۱-۴۶-۹۰

۵۸.۱ پسری در یک گوشه خیابان ایستاده و سکه‌ای را پرتاب می‌کند. اگر شیر بیاید یک قدم به طرف راست و اگر خط بیاید یک قدم به طرف چپ حرکت می‌کند و بعد از آن، در وضع جدید، عمل را ادامه می‌دهد. پیدا کنید احتمال اینکه بعد از ۶ بار پرتاب سکه

الف) در نقطه اول باشد،

ب) در دو قدمی نقطه اولیه باشد.

$$=\frac{15}{16}\times\frac{1}{10}+\frac{15}{16}\times\frac{9}{10}+\frac{15}{16}\times\frac{1}{10}+\left(\frac{15}{16}\times\frac{9}{10}\right)^2\times\frac{15}{16}\times\frac{1}{10}+\cdots$$

۵۹.۱ یک بازیکن حرفه‌ای پینگ‌پونگ A به طور متناوب با دو بازیکن آماتور B و C بازی می‌کند. اگر شانس برد A در مقابل B برابر $\frac{15}{16}$ و در مقابل C برابر $\frac{9}{10}$ باشد، احتمال اینکه C قبل از B از A ببرد، چقدر است؟ فرض کنید بازیکن حرفه‌ای، برای شروع بازی شخص B را انتخاب کند.

۶۰.۱ هر متهم توسط سه قاضی محاکمه می‌شود. اگر دست‌کم ۲ قاضی از ۳ قاضی رأی به محکومیت او بدهند، مجرم شناخته می‌شود. فرض کنید در حالتی که متهم واقعاً مجرم باشد، هر قاضی با احتمال ۰/۷، و مستقل از دیگر قاضی‌ها، رأی به مجرم بودن او بدهد. در حالی که وقتی متهم در واقع بی‌گناه باشد، این احتمال به ۰/۲ تنزل پیدا می‌کند. تجربه نشان داده است که ۷۰٪ متهمان مجرم هستند.

الف) یک متهم، مجرم شناخته شده است. احتمال اینکه واقعاً مجرم باشد چقدر است؟

ب) یک متهم، مجرم شناخته شده است، و می‌دانیم که قاضی‌های ۱ و ۲ رأی به گناهکاری وی داده‌اند. احتمال اینکه قاضی ۳ حکم برائت داده باشد چقدر است؟

۶۱.۱ می‌دانیم که چهار تا از پنج تخم سهره مخطط، ۶ تا از ۷ تخم سهره طلایی، و ۱۱ تا از ۱۲ تخم اردک جنگلی جوجه می‌شوند. یک تخم از هرکدام در ماشین جوجه‌کشی گذارده می‌شود. احتمال اینکه دست‌کم یک جوجه‌ای به دنیا بیاید، چقدر است؟

۶۲.۱ ده مسافر سوار آسانسوری در طبقه‌ی همکف ساختمانی با ۲۰ طبقه می‌شوند. احتمال پیاده شدن آنها در طبقه‌هایی متفاوت چیست؟ چه فرض‌هایی را در نظر می‌گیرید؟

۶۳.۱ دو توپ، هر کدام سیاه یا طلایی رنگ شده‌اند و سپس داخل یک کیسه قرار گرفته‌اند. فرض کنید هر توپ، مستقل از دیگری، با احتمال $\frac{1}{2}$ سیاه رنگ می‌شود.

الف) شما اطلاع حاصل می‌کنید که رنگ طلایی استفاده شده است (و بنابراین حداقل یکی از توپ‌ها طلایی رنگ است). مطلوب است احتمال اینکه هر دو توپ طلایی باشند.

ب) حال فرض کنید که کیسه سرازیر شده و یک توپ بیرون می‌افتد و این توپ طلایی است. احتمال اینکه هر دو توپ طلایی باشند، چقدر است؟

۶۴.۱ الف) به چند طریق می‌توان یک پلاک ۷ رقمی داشت، به طوری که ۲ محل اول آن برای حروف الفبا و ۵ محل دیگر برای اعداد در نظر گرفته شوند؟

ب) قسمت الف را با فرض اینکه هیچکدام از اعداد و یا حروف در یک پلاک تکراری نباشند، حل کنید.

۶۵.۱ ظرفی دارای ۴۰ توپ شماره‌دار از ۱ تا ۴۰ است. فرض کنید آوردن شماره‌های ۱ تا ۱۰ موردنظر

$P(MM|M)=\frac{P(M|MM)P(MM)}{P(M)}$

$P(M|MM)=\frac{P(MM|M)P(M)}{P(MM)}$

ما باشد. دو توپ از ظرف بدون جایگذاری برداشته می‌شوند. پیدا کنید احتمال اینکه:

الف) هر دو توپ انتخابی از ۱ تا ۱۰ باشد،

ب) هیچ‌یک از توپ‌ها ۱۰ یا کمتر از ۱۰ نباشد،

پ) دست‌کم یکی از توپ‌های انتخابی ۱۰ یا کمتر از ۱۰ باشد،

ت) درست یکی از توپ‌های انتخابی ۱۰ یا کمتر از ۱۰ باشد.

۶۶.۱ سه نفر به طور مستقل برای کشف رمز یک پیام کار می‌کنند. احتمال کشف رمز توسط این سه نفر بترتیب $\frac{۱}{۵}$، $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۳}$ است. احتمال اینکه رمز پیام کشف شود، چقدر است؟

۶۷.۱ احتمال بسته بودن یک درب $\frac{۱}{۳}$ است. کلید این درب یکی از ۱۲ کلیدی است که در قفسه است. شخصی بطور تصادفی ۲ کلید از قفسه انتخاب می‌نماید و با خود به سمت در می‌برد.

الف) احتمال اینکه او بتواند بدون مراجعه برای کلید دیگر درب را باز کند، چقدر است؟

ب) اگر در باز شود، احتمال اینکه کلید اصلی یکی از دو کلید انتخابی باشد، چقدر است؟

۶۸.۱ شهری دارای ۵ تعمیرگاه مجاز سایپا است. اگر ۶ دستگاه پراید در یک روز خراب شود، احتمال اینکه افراد دقیقاً به ۲ تعمیرگاه مراجعه کنند چقدر است؟ در این مورد چه فرض‌هایی را در نظر می‌گیرید؟

۶۹.۱ پس از پایان جنگ، سه سرباز تصمیم می‌گیرند که اگر بعد از بیست سال حداقل دو نفر آنها زنده باشند، با هم ملاقات کنند و این پیشامد را جشن بگیرند. احتمال اینکه بتوانند تصمیم خود را عملی کنند، به شرط اینکه احتمال ۲۰ سال زنده بودن آنها مستقل از دیگران بوده و به ترتیب برابر $\frac{۱۲}{۱۳}$، $\frac{۹}{۱۰}$ و $\frac{۱۰}{۱۱}$ باشد، چقدر است؟

۷۰.۱ یک دستگاه دارای ۱۲ سوئیچ است. هر سوئیچ دارای سه وضعیت A، B و C است.

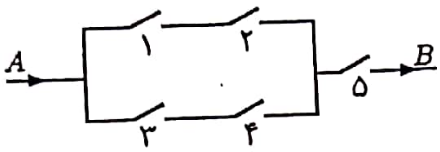
الف) سوئیچ‌ها را به چند شیوه‌ی مختلف می‌توان تنظیم کرد.

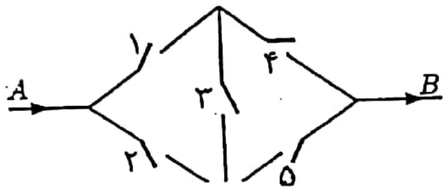
ب) در چند حالت، تعداد سوئیچ‌های یکسانی برای هر وضعیت وجود دارد.

۷۱.۱ پدر و پسری به طرف یک هدف تیراندازی می‌کنند. تجربه نشان داده است که پدر از هر چهار مرتبه تیراندازی سه مرتبه هدف را می‌زند، و پسر از هر ۷ مرتبه تیراندازی چهار مرتبه هدف را می‌زند. احتمال اینکه، وقتی هر دو با هم تیراندازی می‌کنند، هدف لااقل یک مرتبه مورد اصابت قرار گیرد چقدر است؟

۷۲.۱ در نیشابور ۶ هتل وجود دارد. چهار مسافر، در یک ساعت خاص و مستقل از دیگری به یک هتل مراجعه می‌کنند. احتمال اینکه آنها به هتل‌های متفاوتی مراجعه کنند، چقدر است؟

۷۳.۱ در مدارهای زیر احتمال اینکه iامین رله بسته باشد، برابر است با p_i، $i = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$. اگر رله‌ها مستقل عمل کنند، احتمال اینکه در هر مدار جریانی بین A و B برقرار باشد، چقدر است؟





۷۴.۱ یک سیستم مهندسی شامل n جزء را یک سیستم k از n $(k \leq n)$ گویند هرگاه سیستم عمل کند اگر و تنها اگر حداقل k تا از n جزء عمل کنند. فرض کنید که اجزاء مستقل از یکدیگر عمل کنند.

الف) اگر iامین جزء از یک سیستم با احتمال P_i عمل کند مطلوب است احتمال اینکه یک سیستم ۲ از ۴ عمل کند.

ب) قسمت الف را برای یک سیستم ۳ از ۵ تکرار کنید.

۷۵.۱ الف) قابلیت اطمینان یک سیستم، احتمال عملکرد رضایت‌بخش سیستم تحت شرایط مشخص است. یک سیستم دارای هشت جزء مشابه است که به صورت سری به یکدیگر متصل‌اند و مستقل از هم عمل می‌کنند. می‌خواهیم قابلیت اطمینان سیستم دست‌کم برابر ۰/۹۹ باشد. حداقل قابلیت اطمینان هر یک از اجزاء چقدر در نظر گرفته شود؟

ب) بند الف را با فرض اتصال موازی اجزاء حل کنید.

۷۶.۱ یک ماشین کشباف نوعی پوشاک تولید می‌کند. هر پوشاک در دو صورت مورد قبول واقع نگردیده و رد می‌شود:

الف) چنانچه وزن پوشاک از محدوده قابل قبول خارج باشد.

ب) چنانچه به علت از دست رفتن نخ توسط سوزن، در پوشاک سوراخ ایجاد شده باشد.

تجربه نشان می‌دهد که معمولاً ۵٪ پوشاک تولید شده دارای وزن خارج از محدوده بوده و همچنین ۳٪

پوشاک تولید شده دارای سوراخ هستند. چنانچه این دو عیب تنها علل رد شدن پوشاک در کنترل کیفیت باشند، چه بخشی از تولید رد خواهد شد؟ چه فرضهایی لازم دارید؟

۷۷.۱ یک هواپیمای بمب‌افکن، بمبی را در یک میدان به شعاع نیم کیلومتر رها می‌کند. در هریک از چهار گوشه میدان (به طور قرینه) یک ساختمان وجود دارد که از بین می‌رود اگر بمب دست‌کم در ۲۵۰ متری آن اصابت کند. احتمالات زیر را حساب کنید

الف) هیچ یک از ساختمان‌ها خراب نشود،

ب) دست‌کم دو ساختمان خراب شود.

۷۸.۱ تابع f را به صورتی که داده شده است در نظر بگیرید. احتمال رخ دادن پیشامد A را به صورت $P(A)=\int_A f(x)dx$ تعریف می‌کنیم. در هر مورد تعیین کنید که آیا P یک تابع احتمال است یا نه. در موارد الف و ب، θ یک ثابت مثبت است.

الف)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+\frac{\theta}{۲})}{\theta^{۲}} & ۰\leq x\leq \theta\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

ب)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۳x^{۲}}{۲\theta^{۳}} & ۰\leq x<\theta\\ \dfrac{۳(x-۲\theta^{۲})}{۲\theta^{۳}} & \theta\leq x<۲\theta\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

پ)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۰.۱}{x^{۲}} & x\geq ۱\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

۷۹.۱ یک دستگاه الکتریکی بر اثر یکی از دو عامل $T_۱$ یا $T_۲$، با احتمال برابر، ممکن است از کار بیفتد. خرابی‌ها ممکن است در یکی از سه مکان $L_۱$، $L_۲$ یا $L_۳$، با احتمال‌های متفاوت، رخ دهند. توزیع‌های

احتمال شرطی مکان خرابی، به شرط نوع خرابی به شرح زیر است

مکان	شرطی روی: T_1	T_2
L_1	۰/۵	۰/۶
L_2	۰/۱	۰/۳
L_3	۰/۴	۰/۱
مجموع	۱	۱

الف) جدولی مانند جدول ۵.۱ طرح کنید. توزیع احتمال پسین را برای نوع خرابی، اگر مکان رخ دادن خرابی ۱) L_1، ۲) L_2، ۳) L_3 باشد، حساب کنید.

ب) بر پایه نتایج بند الف آیا می‌توان نتیجه گرفت که آگاهی از مکان خرابی، اطلاعاتی مفید درباره نوع خرابی که رخ می‌دهد، فراهم می‌سازد؟

۸۰.۱ توزیع احتمال جهت‌ها و حرکت‌های ترافیک در یک تقاطع در ساعات پر ترافیک عصرها به شرح زیر است

وسیله نقلیه می‌آید از:	وسیله نقلیه می‌رود به: B_1(شمال)	B_2(جنوب)	B_3(شرق)	B_4(غرب)	مجموع
A_1 : شمال	۰/۰۰	۰/۲۴	۰/۰۸	۰/۰۹	۰/۴۱
A_2 : جنوب	۰/۱۰	۰/۰۰	۰/۰۳	۰/۰۳	۰/۱۶
A_3 : شرق	۰/۱۰	۰/۰۴	۰/۰۰	۰/۰۵	۰/۱۹
A_4 : غرب	۰/۰۷	۰/۰۶	۰/۱۱	۰/۰۰	۰/۲۴
مجموع	۰/۲۷	۰/۳۴	۰/۲۲	۰/۱۷	۱

الف) پیشامدهای زیر را با نماد مناسب بنویسید:

۱) وسیله نقلیه از جنوب می‌آید.

۲) وسیله نقلیه از شرق می‌آید و به شمال می‌رود.

۳) وسیله نقلیه به جنوب می‌رود، به شرط آنکه از غرب بیاید.

۴) وسیله نقلیه از شمال می‌آید و به شرق یا جنوب می‌رود.

ب) هریک از احتمال‌های زیر را بیابید و مفهوم آنها را توضیح دهید

۱) $P(A_2)$، ۲) $P(A_2 \cup B_3)$، ۳) $P(A_3 \cap B_1)$، ۴) $P(A_3 \cap B_2^c)$.

پ) هریک از احتمال‌های زیر را بیابید و مفهوم آنها را توضیح دهید

۱) $P(B_1|A_2)$، ۲) $P(B_2|(A_3 \cup A_2))$، ۳) $P(A_2|B_3)$، ۴) $P(A_1 \cup A_2|B_2)$.

طرح‌های تحقیقی فصل اول

۱.۱ چهار تاس را که به صورت زیر شماره‌گذاری شده‌اند در نظر بگیرید

A: ۴ روی چهار وجه و ۰ روی دو وجه دیگر،

B: ۳ روی همه‌ی شش وجه،

C: ۲ روی چهار وجه و ۶ روی دو وجه دیگر،

D: ۵ روی سه وجه و ۱ روی سه وجه دیگر.

فرض کنید عبارت $A > B$ بدین معنی است که وجه روی A از وجه روی B بزرگتر است و همین طور در مورد سایر حالات. نشان دهید که

$$P(A > B) = P(B > C) = P(C > D) = P(D > A) = \frac{۲}{۳}$$

به سخن دیگر، اگر حریف تاسی را انتخاب کند شما می‌توانید همواره تاسی را انتخاب کنید که او را با احتمال $\frac{۲}{۳}$ شکست دهید.

۲.۱ اطلاعات مربوط به اعتصاب‌های انجام شده در واحدهای تحت پوشش وزارت صنایع در سال‌های گذشته جمع‌آوری شده‌اند و بر این پایه، توزیع احتمال تعداد هفته‌ها تا خاتمه هر اعتصاب به صورت زیر به دست آمده است

تعداد هفته‌ها تا خاتمه اعتصاب	۱	۲	۳	۴	۵به بعد
احتمال	۰/۶۱	۰/۲۵	۰/۰۸	۰/۰۳	۰/۰۳

به تازگی در یک کارخانه اعتصابی بر پا شده است.

الف) احتمال اینکه اعتصاب بعد از یک هفته خاتمه یابد، چقدر است؟ در هفته پنجم یا بعد از آن چقدر است؟

ب) اگر اعتصاب وارد هفته دوم شود، احتمال اینکه در این هفته خاتمه یابد، چقدر است؟

پ) احتمال اینکه اعتصاب در هفته اول خاتمه نیابد و در هفته دوم خاتمه یابد، چقدر است؟

ت) برای هر کدام از هفته‌های ۲، ۳ و ۴ احتمال خاتمه اعتصاب در آن هفته را بیابید، به شرط آنکه بدانیم قبل از آن اعتصاب شکسته نشده باشد. آیا به نظر می‌رسد که با افزایش زمان، مشکل شکستن اعتصاب کمتر می‌شود یا بیشتر؟

۳.۱ توزیع احتمال توأم مربوط به جهت تغییر ارزش دو نوع سهام مربوط به دو کارخانه، طبق تجربیات گذشته، به صورت زیر است:

سهام کارخانه A	سهام کارخانه B افزایش B_1	ثابت B_2	کاهش B_3	مجموع
افزایش : A_1	۰/۱۵	۰/۱۵	۰/۰۵	۰/۳۵
ثابت : A_2	۰/۱۰	۰/۲۰	۰/۱۰	۰/۴۰
کاهش : A_3	۰/۱۰	۰/۰۵	۰/۱۰	۰/۲۵
مجموع	۰/۳۵	۰/۴۰	۰/۲۵	۰/۱۰۰

الف) هریک از پیشامدهای زیر را با نماد مناسب بنویسید: ۱) ارزش هر دو سهام افزایش یابند، ۲) ارزش سهام کارخانه A افزایش یابد و ارزش سهام کارخانه B کاهش یابد، ۳) ارزش سهام کارخانه A افزایش یابد به شرط آنکه ارزش سهام کارخانه B تغییر نکند.

ب) احتمال‌های زیر را محاسبه و آنها را تعبیر کنید

۱) $P(A_2 \cup B_2)$، ۲) $P(A_1 \cup B_3^c)$، ۳) $P(A_1|B_1 \cup B_2)$.

پ) توزیع احتمال حاشیه‌ای را برای جهت تغییر ارزش سهام کارخانه A به دست آورید. در این توزیع، برآمدی که بیشترین احتمال را دارد کدام است؟

ت) توزیع احتمال شرطی را برای جهت تغییر ارزش سهام کارخانه A به شرط آنکه ارزش سهام کارخانه B افزایش یابد، به دست آورید. برآمد با بیشترین احتمال در این توزیع کدام است؟

ث) نشان دهید که دو متغیر از نظر آماری وابسته‌اند.

ج) توزیع‌های احتمال شرطی را برای تغییر ارزش سهام کارخانه A، به شرط آنکه ارزش سهام کارخانه B افزایش یابد، تغییر نکند، یا کاهش یابد به دست آورید. ماهیت وابستگی آماری دو متغیر را توصیف کنید.

۴.۱ بررسی تقاضای بازار برای یک محصول جدید الکترونیکی مورد توجه مسئولان یک شرکت تولیدی است. فروش این محصول هنگامی که به بازار عرضه می‌شود ممکن است با شکست (A_1) روبرو شود، موفقیت کم (A_2) به دست آورد، یا موفقیت زیاد (A_3) داشته باشد. از تجربیات گذشته در مورد یک محصول مشابه معلوم شده است که احتمال‌های پیشین، $P(A_1) = ۰/۶۰$، $P(A_2) = ۰/۲۰$ و $P(A_3) = ۰/۲۰$ هستند. برای تصمیم‌گیری درباره تولید و عرضه محصول در کل بازار و یا چشم‌پوشی از

تولید و عرضه آن، نخست محصول در حد آزمایشی تولید و در یک بازار محدود عرضه می‌شود تا ملاحظه شود که آیا فروش کم (B_1) یا فروش زیاد (B_2) خواهد داشت. بر پایه‌ی اطلاعات گذشته و نظر چند بازاریاب، احتمال‌های شرطی فروش زیاد (B_2) در بازار آزمایشی، در حالت‌های مختلف موفقیت نهایی محصول (A_i) به شرح زیرند

$$P(B_2|A_1) = 0/05 \ , \ P(B_2|A_2) = 0/30 \ , \ P(B_2|A_3) = 0/95$$

جدولی مانند جدول ۵.۱ تنظیم کنید. توزیع احتمال پسین را برای موفقیت نهایی محصول، در دو حالت فروش کم و فروش زیاد در بازار آزمایشی، به دست آورید.

۵.۱ مدل‌های جعبه و مهره (۱) مدل‌های جعبه و مهره افزون بر اینکه زمینه‌ی مناسبی برای تسلط بر فنون شمارش فراهم می‌آورند، دارای کاربردهای متنوعی نیز می‌باشند. در این طرح و طرح بعدی، مدل‌های اصلی جعبه و مهره و چند کاربرد آنها مطرح می‌شود. فرض کنید می‌خواهیم تعداد n جعبه متمایز را با r مهره پر کنیم. بر حسب اینکه مهره‌ها متمایز یا غیر متمایز باشند و تکرار در هر جعبه مجاز یا غیر مجاز باشد، چهار مدل داریم:

الف) مهره‌ها متمایز و مهره‌ی مکرر مجاز است. نشان دهید در این حالت پر کردن جعبه‌ها به n^r شیوه ممکن است.

ب) مهره‌ها متمایز و مهره‌ی مکرر غیر مجاز است. نشان دهید در این حالت پُر کردن جعبه‌ها به $\frac{n!}{(n-r)!}$ شیوه ممکن است ($r \leq n$).

پ) مهره‌ها غیر متمایز و مهره‌ی مکرر غیر مجاز است. نشان دهید در این حالت پر کردن جعبه‌ها به $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ روش ممکن است ($r \leq n$).

ت) مهره‌ها غیر متمایز و مهره‌ی مکرر مجاز است. نشان دهید در این حالت پر کردن جعبه‌ها به $\binom{n+r-1}{r}$ شیوه ممکن است.

در عمل علاوه بر چهار مدل اصلی فوق، با مدل‌های دیگری هم روبرو هستیم که روش بررسی بسیاری از آنها کم و بیش مشابه روش بررسی مدل‌های فوق است.

۶.۱ مدل‌های جعبه و مهره (۲) الف) می‌خواهیم ۵ کارگر تازه وارد را بین ۸ قسمت تولیدی یک کارخانه توزیع کنیم، طوری که به هر قسمت حداکثر یک کارگر تخصیص یابد. این کار به چند روش ممکن است؟

ب) احتمال اینکه روزهای تولد اعضای یک خانواده ۹ نفری تمام روزهای هفته را شامل شود، چقدر است؟

پ) تعداد جواب‌های درست و غیر منفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ را پیدا کنید.

ت) ۵ دستگاه پرینتر توسط یک شرکت بازرگانی، که دارای ۹ شعبه است، خریداری می‌شود. به چند روش می‌توان دستگاه‌ها را بین شعبه‌ها توزیع کرد به طوری که به هیچ شعبه‌ای بیش از یک دستگاه تخصیص نیابد؟

ث) به چند روش می‌توان $2r$ مهره‌ی غیر متمایز را میان چهار جعبه‌ی متمایز A، B، C و D توزیع کرد به گونه‌ای که هرکدام از جعبه‌های A و B شامل حداکثر r مهره باشند؟

فصل ۲

متغیرهای تصادفی و توزیع‌های مهم گسسته

۱.۲ متغیر تصادفی

در فصل قبل با الگوی احتمالی یک آزمایش، با فضای نمونه‌ای و پیشامدهای مربوط به آن آشنا شدیم. اغلب به جز فضای نمونه‌ای تعابیری از عناصر آن به عنوان یک پیشامد مورد توجه می‌باشد. به علاوه ممکن است فضای نمونه به صورت کیفی بیان شود و یا اینکه چند بعدی باشد که در این حالت برای محاسبه احتمال پیشامدهای مختلف لازم است ابتدا عناصر فضای نمونه را به شاخص‌های عددی تبدیل کنیم. مثال زیر ضرورت این مهم را روشن می‌کند.

مثال ۱.۲ مأمور کنترل کیفیت موظف به بازرسی ۴ واحد از هر محموله ۲۵تایی از کالاهاست. وی به تصادف از هر محموله ۴ کالا را انتخاب و بررسی می‌کند و مثلاً اگر کالای دوم معیوب و بقیه سالم باشند این حالت را با (سمسس) گزارش می‌دهد. در اینجا عناصر فضای نمونه، که $۱۶ = ۲^۴$ عضو دارد، عبارت‌اند از

مممم ، مممس ، ممسس ، مسسس ، سسسس

ممسم ، مسمس ، سمسس

مسمم ، سممس ، سسمس

سممم ، مسسم ، سسسم

سمسم

سسمم

کار با چنین فضای غیرعددی و چهاربعدی دشوار است، اما می‌توان عناصر آن را به اعداد تبدیل کنیم. مثلاً اگر برای مأمور کنترل، تعداد کالاهای معیوب در نمونه مهم باشد آنگاه وی به برآمد (س‌س‌س‌س) عدد صفر را نسبت می‌دهد و به برآمد (م‌س‌س‌س) عدد ۱ را و ... . پس گویی با یک تابع مانند X (در احتمال اینچنین توابعی را با حروف بزرگ X، Y و ... به‌جای حروف کوچک f، g و ... نشان می‌دهند) سروکار داریم که به هر عنصر فضای نمونه، یک عدد نسبت می‌دهد، مثلاً

X : تعداد معیوب‌ها

$X(\{\text{سسسس}\}) = ۰$

$X(\{\text{مسسس}\}) = X(\{\text{سمسس}\}) = X(\{\text{سسمس}\}) = X(\{\text{سسسم}\}) = ۱$

S_X

پس فضای نمونه تبدیل به مجموعه مقادیر عددی می‌شود که در اینجا $\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$ است. ذکر این نکته ضروری است که متغیر تصادفی X مقادیر مختلف را به تصادف اختیار می‌کند. در مثال بالا قبل از انجام نمونه‌برداری نمی‌دانیم چه تعداد کالای سالم در نمونه خواهیم داشت و لذا نمی‌دانیم X چه مقداری اختیار می‌کند. پس X در واقع تابعی است که مقادیر آن به تصادف تعیین می‌شود و لذا یک تابع تصادفی است. چون در آینده با توابعی از خود X سروکار داریم برای پرهیز از عبارت تابع تابع، X را متغیر تصادفی می‌نامیم. بنابراین تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۲ متغیر تصادفی X، تابعی حقیقی است که روی فضای نمونه یک آزمایش تعریف می‌شود. یعنی $X : S \to S_x \subseteq \mathbb{R}$ که منظور از S_x برد متغیر تصادفی X است.

اگر S_x یک مجموعه متناهی یا نامتناهی شمارا باشد آنگاه گوییم X یک متغیر تصادفی گسسته است. در غیر این صورت X یک متغیر تصادفی از نوع پیوسته است. در این فصل به مطالعه متغیرهای تصادفی گسسته می‌پردازیم.

توجه الف) برای هر پیشامد e از فضای نمونه S داریم $X(e) = x \in S_x$، و چون رخداد e تصادفی می‌باشد بنابراین مشاهده $x = X(e)$ نیز تصادفی است.

ب) از نمادهای زیر در محاسبات احتمال برای متغیر تصادفی استفاده می‌شود

$$(X = x) = \{e : X(e) = x\} \subseteq S \quad , \quad (X \leq x) = \{e : X(e) \leq x\} \subseteq S$$

۲.۲ تابع احتمال و تابع توزیع

به مثال ۱.۲ باز می‌گردیم تا یک مفهوم مهم را قبل از تعریف دقیق آن تشریح کنیم.

مثال ۱.۲ (ادامه) پیشامدهای ساده مربوط به نتایج بازرسی ۴ کالای نمونه طوری گروه‌بندی شده‌اند که تمام پیشامدهای هر ستون دارای مقدار یکسانی برای X باشند. مثلاً برای پیشامدهای ستون چهارم مقدار X برابر ۳ است. اکنون فرض کنید ۰/۱۴ کالاهای کارخانه معیوب باشند. بر این پایه می‌توان احتمال هر پیشامد ساده را محاسبه کرد و با جمع کردن احتمال پیشامدهای ساده مربوط به هر ستون، یک جدول را به نام جدول توزیع احتمال تشکیل داد. مثلاً احتمال هر پیشامد ساده ستون سوم برابر است با $(۰/۸۶) \times (۰/۱۴)^۳ = ۰/۰۰۲۴$، پس به طور خلاصه احتمال $\{X = ۳\}$ برابر با $۰/۰۰۹۴ = ۴ \times ۰/۰۰۲۴$ است. جدول زیر، توزیع احتمال متغیر تصادفی X نامیده می‌شود.

مقادیر X	۰	۱	۲	۳	۴	جمع
احتمال	۰/۵۴۷۰	۰/۳۵۶۲	۰/۸۷۰	۰/۰۰۹۴	۰/۰۰۰۴	۱

همان گونه که ملاحظه می‌شود جمع احتمال‌ها برابر ۱ است. این جدول نشان دهنده‌ی چگونگی توزیع احتمال ۱ به مقادیر مختلفی است که X اختیار می‌کند.

تعریف ۲.۲ تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته را که تابعی حقیقی از $\mathbb{R}$ به $[۰,۱]$ است با ضابطه $P_X(x) = P(X = x)$ تعریف می‌کنیم.

$P_X(x) = P(X = x)$

این تابع بیان می‌کند که:

الف) متغیر تصادفی X چه مقادیری را اختیار می‌کند،

$P(X=2)$

ب) هر مقدار را با چه احتمالی اختیار می‌کند.

دو شرط زیر در مورد هر تابع احتمال صادق است

همه احتمال‌ها مثبت‌اند

$$P(x) \geq ۰ \ , \ x \in \mathbb{R} \quad , \quad \sum_x P(x) = ۱$$

جمع احتمال‌ها

$A = \{0, 1\}$

همچنین احتمال هر پیشامد مانند A را می‌توان از رابطه $P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(x)$ به دست آورد.

$P(A) = P_X(0) + P_X(1)$

مثال ۲.۲ تاس سالمی را دوبار پرتاب می‌کنیم اگر متغیر تصادفی X را مجموع اعداد رو شده تعریف کنیم، آنگاه $S_x = \{۲, ۳, \cdots, ۱۲\}$ و

متغیر X مجموع اعداد رو شده است

$$
\begin{aligned}
(X=۲) &= \{(۱,۱)\}\\
(X=۳) &= \{(۱,۲),(۲,۱)\}\\
(X=۴) &= \{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)\}\\
&\vdots\\
(X=۱۲) &= \{(۶,۶)\}
\end{aligned}
$$

$P(X=2)=\frac{1}{36}=P(X=12)$

و تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است

$$
P_X(x)=P(X=x)=\begin{cases}
\frac{۱}{۳۶} & x=۲,۱۲\\
\frac{۲}{۳۶} & x=۳,۱۱\\
\frac{۳}{۳۶} & x=۴,۱۰\\
\frac{۴}{۳۶} & x=۵,۹\\
\frac{۵}{۳۶} & x=۶,۸\\
\frac{۶}{۳۶} & x=۷\\
۰ & \text{سایر نقاط}
\end{cases}
$$

تابع فوق را می‌توان به صورت زیر نیز خلاصه کرد

$$
P_X(x)=\begin{cases}
\frac{۶-|x-۷|}{۳۶} & x=۲,\dots,۱۲\\
۰ & \text{سایر نقاط}
\end{cases}
$$

از این پس تابع احتمال را فقط برای مقادیری که مثبت است می‌نویسیم و از قید صفر برای سایر نقاط چشم‌پوشی می‌کنیم.

مثال ۳.۲ در مثال ۱.۲ فرض کنید مأمور کنترل روش دیگری را پیش می‌گیرد. وی به طور پیاپی کالا از انبار انتخاب و بررسی می‌کند تا به یک کالای معیوب برسد (با این روش چگونه می‌توان درباره‌ی کیفیت کالاها استنباط کرد؟) اگر X تعداد کالاهایی باشد که وی بررسی می‌کند تا به اولین معیوب برسد، آنگاه $S_x=\{۱,۲,\dots\}$ و

Y: تعداد سالم‌ها تا مشاهده اولین معیوب

$Y=0 \leftarrow \{م\}$

معنی مشاهده بالا

$$
\begin{aligned}
(X=1) &= \{م\} \\
(X=2) &= \{س،م\} \\
(X=3) &= \{س،س،م\} \\
&\vdots \\
(X=n) &= \{\underbrace{س،\cdots،س}_{n-1\ \text{مرتبه}}،م\}
\end{aligned}
$$

با فرض اینکه ۰/۱۴ از تولیدات کارخانه معیوب باشد، تابع احتمال X به صورت زیر خواهد بود

$$P(X=x) \leftarrow P_X(x) = ۰/۱۴(۰/۸۶)^{x-1} \quad x = ۱،۲،\cdots$$

برای مثال پیشامد $X = ۵$ به این معنی است که مأمور کنترل در پنجمین انتخاب خود به اولین کالای معیوب برخورد کند. احتمال رخ دادن این حالت برابر است با

$$P_X(۵) = P(X = ۵) = ۰/۱۴ \times ۰/۸۶^{۴} = ۰/۰۸$$

همچنین پیشامد $\{X \le ۵\}$ به این معنی است که مأمور کنترل تا پنجمین انتخاب خود به اولین کالای معیوب برخورد کند. احتمال رخ دادن این پیشامد برابر است با

$$
\begin{aligned}
P(X \le ۵) = \sum_{x \le ۵} P_X(x) &= P_X(۱) + \cdots + P_X(۵) \\
&= (۰/۱۴ \times ۰/۸۶^{۰}) + \cdots + (۰/۱۴ \times ۰/۸۶^{۴}) \\
&= ۰/۱۴ \times (۱ + ۰/۸۶ + ۰/۷۴ + ۰/۶۴ + ۰/۵۵) = ۰/۵۳
\end{aligned}
$$

$P_X(۲) = P(X=۲) = (۰/۱۴)(۰/۸۶)$

پیشامد $X \le ۵$ در مثال بالا نمونه‌ای از پیشامدهای به صورت $X \le x$ است که بر پایه آن یک مفهوم مهم به نام تابع توزیع تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۲ فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $P_X(x)$ باشد. تابع

$$F_X(x) = \boxed{P(X \le x)} = \sum_{t \le x} P_X(t)$$

تابع توزیع

را تابع توزیع متغیر تصادفی X می‌نامیم. گاهی به این نام صفت تجمعی اضافه می‌شود. زیرا بنا به تعریف، $F_X(x)$ برابر با حاصل‌جمع احتمال‌های کلیه‌ی مقادیر X تا نقطه‌ی x (به انضمام خود x) است.

ویژگی‌های زیر را برای تابع توزیع می‌توان بر پایه‌ی ویژگی‌های تابع احتمال به دست آورد

الف) $0 \le F_X(x) \le 1$،

ب) تابع توزیع یک تابع غیر نزولی است. به علاوه در حالت مورد بحث که X متغیر تصادفی گسسته است، $F_X(x)$ یک تابع پله‌ای است و ارتفاع پله در هر نقطه x برابر با $P_X(x)$ است،

پ) $F_X(-\infty) = 0$ و $F_X(\infty) = 1$،

ت) تابع $F(x)$ از راست پیوسته است.

$$E(X) = \sum_{x=0}^{4} x P(x) = 0 \times 0/5470 + 1 \times 0/3562 + \cdots +$$ ۴/۰۱۹

و سرانجام اینکه برای هر $a, b \in \mathbb{R}$،

$$P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$$
$$= F_X(b) - F_X(a)$$

X : تعداد

مثال ۴.۲ تابع توزیع متغیر تصادفی X را در مثال ۱.۲ بیابید و رسم کنید.

حل: تابع احتمال X را دوباره می‌نویسیم و بر پایه‌ی آن تابع توزیع X را به‌دست می‌آوریم

$$P_X(x) = \begin{cases} 0/5470 & x = 0 \\ 0/3562 & x = 1 \\ 0/0870 & x = 2 \\ 0/0094 & x = 3 \\ 0/0004 & x = 4 \end{cases} \qquad F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0/5470 & 0 \le x < 1 \\ 0/9032 & 1 \le x < 2 \\ 0/9902 & 2 \le x < 3 \\ 0/9996 & 3 \le x < 4 \\ 1 & 4 \le x \end{cases}$$

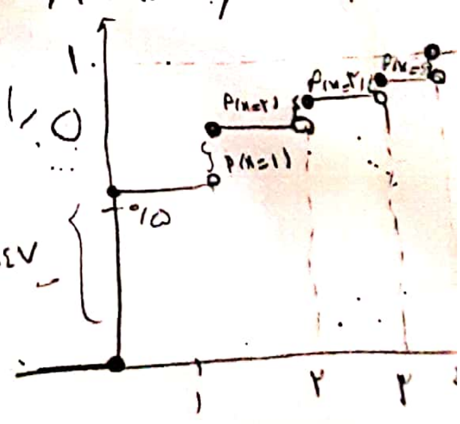
صفر نباشد — تابع احتمال — $P(X=0)$ — $+P_X(1)$ — $+P(X=2)$ — $+P_X(3)$

$E(X^2) = \sum x^2 P(x)$

$P(1 \le X < 2) = P(X=0)$

$x \in [1,2)$ مثلاً $x = 1/2$ $\quad P(X \le 1/2) = P(X=0) + P(X=1)$

$F_X(2/5) = P(X \le 2/5) = \quad X \le 1/5 \quad \{0,1,2\}$



شکل ۱.۲ نمودار تابع توزیع X در مثال ۴.۲

$\{a < x \le b\} = \{x \le b\} - \{x \le a\}$

توجه کنید که، برای مثال، $F(۲) = F(۲/۶) = ۰/۹۹۰۲$. زیرا پیشامد: "تعداد کالاهای معیوب نمونه کمتر یا مساوی ۲" با پیشامد: "تعداد کالاهای معیوب نمونه کمتر یا مساوی ۲/۶" معادل است. همان‌طور که در قسمت ب بالا گفتیم نقاط پرش تابع پله‌ای $F_X(x)$، همان نقاطی است که $P_X(x)$ مثبت است.

تذکر از این پس از نوشتن اندیس X در $P_X(x)$ و $F_X(x)$ چشم‌پوشی کرده و، به جز در موارد خاص، از $P(x)$ و $F(x)$ برای نشان دادن تابع احتمال و تابع توزیع احتمال استفاده می‌کنیم.

۳.۲ امید ریاضی: معیاری برای مرکزیت

در آمار توصیفی خصوصیات مهم مجموعه‌های داده‌ها مانند میانگین و واریانس تعریف و بررسی می‌شوند. چون توزیع‌های احتمال مدل‌هایی هستند که در آنها احتمال به عنوان فراوانی نسبی در نظر گرفته می‌شود، در مورد آنها نیز می‌توان معیارهای مشابهی برای مرکزیت و پراکندگی تعریف کرد. معیاری که معمولاً برای گرایش مرکزی یک متغیر تصادفی (یا اصطلاحاً برای توزیع آن) به‌کار می‌رود میانگین یا امید ریاضی، و آنکه برای پراکندگی به‌کار می‌رود واریانس نام دارد.

همانطور که در مباحث آمار توصیفی دیده‌اید، میانگین مجموعه‌ای از داده‌ها را می‌توان به صورت $\sum$(فراوانی نسبی × مقدار) محاسبه کرد. حال اگر یک آزمایش را به دفعات تکرار کنیم و مقادیر متغیر تصادفی X را هر بار یادداشت کنیم، با افزایش تعداد آزمایشها، فراوانی نسبی به سوی احتمال میل می‌کند. بنابراین طبیعی است که میانگین (امید ریاضی) یک متغیر تصادفی X را به صورت $\sum$(احتمال × مقدار) تعریف کنیم.

تعریف ۴.۲ اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $P(x)$ باشد، آنگاه امید ریاضی X را با $E(X)$ (گاهی با μ_X) نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

پارامتر جامعه

$$\mu_X = E(X) = \sum_x xP(x)$$

چنانچه مجموع فوق همگرا نباشد گوییم $E(X)$ وجود ندارد.

مثال ۵.۲ بازی زیر توسط A به B پیشنهاد می‌شود. دو تاس سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد رو شده کمتر یا مساوی ۱۰ بود A برنده است و ۶۵۰ ریال دریافت می‌کند، ولی اگر مجموع اعداد رو شده ۱۱ یا ۱۲ بود B برنده است و ۵۰۰۰ ریال از A دریافت می‌کند. امید ریاضی برد A را محاسبه کنید.

حل: اگر متغیر تصادفی X نمایانگر مجموع اعداد رو شده باشد طبق مثال ۲.۲ تابع احتمال آن به صورت

زیر است

$$P(x) = \frac{۶ - |x - ۷|}{۳۶} \quad , \quad x = ۲, ۳, \cdots, ۱۲$$

فرض کنید W نمایانگر میزان برد A در یک دور بازی باشد، تابع احتمال W به صورت زیر است

w	$P(W = w)$
۶۵۰	$\frac{۳۳}{۳۶} = \frac{۱۱}{۱۲}$
-۵۰۰۰	$\frac{۳}{۳۶} = \frac{۱}{۱۲}$

$P(X \leq 10) = 1 - P(X > 10)$

$P(X = 11 \,\&\, 12) = P(X=11) + P(X=12)$

$\frac{2}{36}$ $\quad$ $\frac{1}{36}$

و لذا

$$E(W) = (۶۵۰ \times \frac{۱۱}{۱۲}) + (-۵۰۰۰ \times \frac{۱}{۱۲}) \simeq \underline{۱۸۰}$$

پس امید ریاضی برد A (باخت B) در هر دور بازی برابر ۱۸۰ ریال است. دقت کنید که در این مثال نمی‌توان گفت که درآمد A در هر بازی ۱۸۰ ریال است، زیرا $E(X)$ لزوماً همان مقداری نیست که در یک دور بازی می‌بریم. اینکه می‌گوییم $E(X)$ برابر ۱۸۰ ریال است بدین معنی است که اگر این بازی به دفعات فراوان تکرار شود، نسبت کل درآمد به تعداد بازی‌های انجام شده (متوسط مقدار بردها) تقریباً ۱۸۰ ریال خواهد بود.

همین‌جا با اصطلاح دیگری نیز آشنا می‌شویم. آشکار است که بازی مطرح شده در مثال بالا به نفع A و به ضرر B است. اما اگر A قبل از هر دور بازی مقدار ۱۸۰ ریال به B بپردازد، آنگاه بازی منصفانه می‌شود (اگر بتوان انصاف را در قمار حاکم کرد!). زیرا در این صورت متوسط برد A، در صورت تکرار فراوان بازی، برابر صفر خواهد بود.

نکته بازی بالا و بعضی بازی‌های غیرمنصفانه دیگر برای اکثر مردم جذاب است به‌گونه‌ای که حاضر هستند به‌جای شخص B بازی کنند. به نظر شما رمز کار در چیست؟

مفهوم امید ریاضی یک متغیر تصادفی را می‌توان به هر تابعی از آن تعمیم داد. اگر $g(X)$ تابعی از متغیر تصادفی گسسته X باشد، آنگاه مقدار زیر را، در صورت وجود، امید ریاضی $g(X)$ گوییم

$$E(g(X)) = \sum_x g(x)P(x)$$

از تعریف بالا می‌توان نتیجه گرفت که اگر $g_۱(X)$ و $g_۲(X)$ دو تابع از متغیر تصادفی X، و a و b دو

مقدار ثابت باشند، آنگاه

$$E[ag_1(X) + bg_2(X)] = aE[g_1(X)] + bE[g_2(X)]$$

چند حالت خاص رابطه فوق را، که بیانگر خطی بودن عملگر امید ریاضی است، برای استفاده‌های بعدی ذکر می‌کنیم

$$\begin{aligned} E(a) &= a \\ E(bX) &= bE(X) \\ E(a+bX) &= a+bE(X) \end{aligned}$$

مثال ۶.۲ فرض کنید X تعداد واحد کالای خاصی باشد که در یک هفته در فروشگاه بهار فروخته می‌شود. توزیع احتمال X در جدول زیر آمده است (در عمل، این جدول را چگونه می‌توان تهیه کرد؟)

x	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
$P(x)$	۰/۰۴	۰/۱۱	۰/۱۸	۰/۲۷	۰/۲۰	۰/۱۲	۰/۰۵	۰/۰۲	۰/۰۱

الف) $E(X)$ را بیابید و آن را تعبیر کنید.

ب) اگر به ازای هر واحد فروخته شده ۱۵۰۰۰۰ ریال سود به‌دست آید، و هزینه ثابت هفتگی فروشگاه ۲۱۰۰۰۰ ریال باشد، امید ریاضی سود خالص چقدر است؟

حل: الف) برای محاسبه $E(X)$ به مقادیر $xP_X(x)$ نیاز داریم که آنها را در جدول درج می‌کنیم

x	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	مجموع
$P_X(x)$	۰/۰۴	۰/۱۱	۰/۱۸	۰/۲۷	۰/۲۰	۰/۱۲	۰/۰۵	۰/۰۲	۰/۰۱	۱
$xP_X(x)$	۰/۰۸	۰/۳۳	۰/۷۲	۱/۳۵	۱/۲۰	۰/۸۴	۰/۴۰	۰/۱۸	۰/۱۰	۵/۲

پس $E(X) = ۵/۲$، یعنی در هر هفته به طور متوسط ۵/۲ کالا فروش می‌رود. به بیان دیگر به طور متوسط در هر ۱۰ هفته ۵۲ کالا به فروش می‌رود.

ب) سود خالص از فروش X واحد در یک هفته، $150000X$ ریال است. با کم کردن هزینه ثابت سود خالص برابر با $150000X - 210000$ است. پس

$$E(\text{سود خالص}) = E(150000X - 210000) = 150000E(X) - 210000$$

$$= (150000 \times 5/2) - 210000 = 570000 \text{ (ریال)}$$

$var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

۴.۲ واریانس: معیاری برای پراکندگی

در بخش قبل با مفهوم امید ریاضی یک متغیر تصادفی، که به عنوان یک معیار مرکزی برای توزیع احتمال آن متغیر به کار می‌رود، آشنا شدیم. پراکندگی هر متغیر تصادفی (یا اصطلاحاً پراکندگی توزیع احتمال آن) با معیاری به نام واریانس، و یا با جذر آن که انحراف معیار نام دارد، اندازه‌گیری می‌شود.

تعریف ۵.۲ اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $P_X(x)$ باشد، آنگاه واریانس X را با $V(X)$ یا σ_X^2 نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$E(X)$

$g(X) = (X-\mu_X)^2$

$$V(X) = \sigma_X^2 = E(X-\mu_X)^2$$
$$= \sum_x (x-\mu_X)^2 P(x)$$

$E[g(X)] = Var(X)$

چنانچه مجموع فوق همگرا نباشد، گوییم $V(X)$ وجود ندارد.

به سادگی می‌توان نشان داد که

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2$$

که غالباً از این رابطه برای محاسبه واریانس استفاده می‌شود. اصطلاح واریانس به این موضوع که مشاهدات مربوط به X غیرقابل پیش‌بینی و از یک آزمایش به آزمایش دیگر تغییر می‌کند اشاره دارد، و مقدار آن میزان تغییرپذیری مقادیر X را بیان می‌دارد. واریانس، مترادف مفهوم فیزیکی گشتاور ماند در توزیع یک جرم حول مرکز ثقل آن است.

در استفاده از واریانس، و به ویژه تعبیر آن، یک دشواری وجود دارد: چون $V(X)$، متوسط مربع انحرافات مقادیر X از میانگینش می‌باشد، واحد آن، مربع واحد X است. مثلاً اگر X برحسب متر باشد، $V(X)$ برحسب مترمربع خواهد بود. برای اینکه معیار پراکندگی با همان واحد X بیان شود و درک شهودی آن ساده‌تر گردد، می‌توان از جذر واریانس استفاده کرد. جذر مثبت واریانس X را انحراف معیار X گوییم و با σ_X نشان می‌دهیم، یعنی

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

چنانچه σ_X عددی بزرگ (کوچک) باشد نشان‌دهنده‌ی آن است که تغییرپذیری X زیاد (کم) است. باید دقت کرد که بزرگی و کوچکی σ_X به واحد اندازه‌گیری X نیز بستگی دارد که ممکن است در تعبیر میزان

امید ریاضی $E(ax+b) = aE(x)+b$

پراکندگی باعث گمراهی شود. در مقام مقایسه، مثلاً اگر انحراف معیار دو توزیع احتمال به ترتیب ۱۵ و ۶ باشد می‌توان گفت که توزیع اول از توزیع دوم پراکندگی بیشتری دارد (و با کمی مسامحه گوییم توزیع اول ۲/۵ برابر پراکنده‌تر است.)

مثال ۷.۲ در مثال ۶.۲ واریانس و انحراف معیار فروش هفتگی کالا را بیابید.

حل: برای محاسبه واریانس به مقادیر $E(X)$ و $E(X^۲) = \sum_x x^۲P(x)$ نیاز داریم که آنها را محاسبه و در ادامه‌ی جدول مربوط به تابع احتمال درج می‌کنیم.

$var(ax+b) = a^2 var(x)$

عدد ثابت

x	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	جمع
$P_X(x)$	۰/۰۴	۰/۱۱	۰/۱۸	۰/۲۷	۰/۲۰	۰/۱۲	۰/۰۵	۰/۰۲	۰/۰۱	۱
$xP(x)$	۰/۰۸	۰/۳۳	۰/۷۲	۱/۳۵	۱/۲۰	۰/۸۴	۰/۴۰	۰/۱۸	۰/۱۰	۵/۲۰
$x^۲P(x)$	۰/۱۶	۰/۹۹	۲/۸۸	۶/۷۵	۷/۲	۵/۸۸	۳/۲	۱/۶۲	۱	۲۹/۶۸

$E(X^2)$

اکنون به سادگی واریانس و انحراف معیار فروش هفتگی به دست می‌آیند:

واریانس فروش هفتگی $\sigma_X^۲ = V(X) = E(X^۲) - [E(X)]^۲ = ۲۹/۶۸ - (۵/۲)^۲ = ۲/۶۴$

انحراف معیار فروش هفتگی $\sigma_X = \sqrt{۲/۶۴} = ۱/۶۲$

$\sigma^2_{ax+b} = \sigma^2(ax+b) = a^2\sigma^2 x$

ویژگی‌های واریانس و انحراف معیار

اگر X یک متغیر تصادفی و a و b دو عدد ثابت باشند، به آسانی می‌توان بررسی کرد که

عدد ثابت در واریانس تاثیری ندارد.

واریانس	انحراف معیار
$\sigma^۲_{X+b} = V(X+b) = V(X) = \sigma^۲_X$	$\sigma_{X+b} = \sigma_X$
$\sigma^۲_{aX+b} = V(aX+b) = a^۲V(X) = a^۲\sigma^۲_X$	$\sigma_{aX+b} = \|a\|\sigma_X$

$var(b) = 0.$

مثال ۸.۲ در مثال ۶.۲ انحراف معیار سود خالص چقدر است؟

حل: سود خالص عبارت است از $۱۵۰۰۰۰X - ۲۱۰۰۰۰$، پس

$$\sigma^۲_{۱۵۰۰۰۰X-۲۱۰۰۰۰} = (۱۵۰۰۰۰)^۲\sigma^۲_X = (۱۵۰۰۰۰)^۲ \times ۲/۶۴ = ۵/۹۴ \times ۱۰^{۱۰}$$

$$\sigma_{۱۵۰۰۰۰X-۲۱۰۰۰۰} = ۱۵۰۰۰۰\sigma_X = ۱۵۰۰۰۰ \times ۱/۶۲ = ۲۴۳۰۰۰ \text{ (ریال)}$$

۵.۲ گشتاورها و تابع مولد گشتاورها

میانگین و واریانس، دو حالت خاص از یک مفهوم کلی به نام گشتاور هستند. در این بخش مفهوم گشتاور

و تابع مولد گشتاور یک متغیر تصادفی را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۶.۲ فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد، در این صورت مقادیر

$$m_k = E(X)^k = \sum_x x^k P(X = x)$$

$$\mu_k = E(X - \mu_X)^k = \sum_x (x - \mu_X)^k P(X = x)$$

گشتاور مرتبه kام X — گشتاور مرکزی مرتبه kام X — $k = 2 \to Var(X)$

را، در صورت وجود، به ترتیب گشتاور مرتبه kام X و گشتاور مرکزی مرتبه kام X گوییم.

اصطلاح گشتاور از مکانیک و از تشابه بین تابع احتمال و توزیع جرم ناشی شده است. می‌دانیم که گشتاور یک جرم نقطه‌ای نسبت به نقطه‌ای دیگر (یا محور گذرنده بر آن نقطه) برابر حاصلضرب جرم در فاصله آن تا نقطه (یا محور) موردنظر است. اگر چند جرم نقطه‌ای داشته باشیم گشتاور کل برابر مجموع همه‌ی گشتاورهاست. گشتاور متوسط نیز، حاصل تقسیم گشتاور کل بر جرم کل است (اگر فاصله‌ها به توان k برسند، نتیجه گشتاور مرتبه kام نامیده می‌شود.) به بیان دیگر گشتاور متوسط برابر با مجموع حاصلضرب جرم‌های نسبی در فواصل جرم‌ها تا نقطه (یا محور) مورد بحث می‌باشد. به این ترتیب آشکار می‌شود که کمیتی که در بالا تعریف شد، دقیقاً برابر با گشتاور متوسط (مرتبه kام) جرم‌های احتمال متناظر با متغیر تصادفی X است.

گشتاور مرتبه اول یک توزیع احتمال، همان امید ریاضی توزیع است که به تعبیر مکانیکی مرکز ثقل یک توزیع جرم نامیده می‌شود. گشتاور مرکزی مرتبه دوم نیز واریانس توزیع است که پراکندگی توزیع را توصیف می‌کند (با توجه به رابطه $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$ واریانس را می‌توان برپایه گشتاورهای اول و دوم نیز به دست آورد.) گشتاورهای مراتب بالاتر یک متغیر تصادفی، جوانب دیگری از توزیع احتمال آن متغیر را، که البته جنبه‌ی شهودی کمتری دارند، اندازه می‌گیرند و توصیف می‌کنند. اگرچه اولین و دومین گشتاور، به طور کامل یک توزیع احتمال را توصیف یا مشخص نمی‌کنند (همانطور که طول قد و وزن به تنهایی هیئت یک فرد را معین نمی‌کنند)، ولی مهمترین و مفیدترین ویژگیهای یک توزیع احتمال را به دست می‌دهند.

نکته مهم درباره‌ی گشتاورها آن است که، تحت شرایط نسبتاً کلی، بر اساس گشتاورهای یک متغیر تصادفی می‌توان به طور یکتا توزیع احتمال آن متغیر تصادفی را تعیین کرد. لذا شناسایی گشتاورهای یک توزیع از لحاظ نظری اهمیت دارد. تابع ویژه‌ای که با مشتق‌گیری از آن می‌توان گشتاورهای یک متغیر تصادفی را تولید کرد، تابع مولد گشتاور نام دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$E(e^{tx})$

تعریف ۷.۲ فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $P(x)$ باشد. اگر عدد مثبت h وجود داشته باشد که برای هر $t \in (-h, h)$، $\sum_x e^{tx}P(x)$ موجود باشد، آنگاه تابع زیر، که تابعی از t است، تابع مولد گشتاور X نامیده می‌شود

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx}P(x)$$

اگر $M_X(t)$ یعنی تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X وجود داشته باشد آنگاه $M_X(t)$ در یک همسایگی از مبدا به طور پیوسته مشتق‌پذیر است. چنانچه از این تابع k بار نسبت به t مشتق بگیریم، داریم

$$M^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k}M_X(t) = \sum_x x^k e^{tx}P(x)$$

با قرار دادن $t = 0$ به دست می‌آوریم

$$M_X^{(k)}(0) = \sum_x x^k P(x) = E(X^k)$$

رابطه اخیر نشان می‌دهد که گشتاورهای یک متغیر تصادفی را می‌توان با مشتق‌گیری از تابع مولد گشتاور آن متغیر به دست آورد. به ویژه اینکه

$$\mu_X = E(X) = M'(0)\,,$$

$$\sigma_X^2 = V(X) = M''(0) - [M'(0)]^2$$

$E(X^2)$

مثال ۹.۲ تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است

$$P(x) = 3(1/4)^x \quad , \quad x = 1, 2, 3, \cdots$$

تابع مولد گشتاورهای X را، در صورت وجود، بیابید.

$a^x b^x = (ab)^x$

حل: تابع مولد گشتاورهای X، در صورت وجود، برابر است با

$$M_X(t) = \sum_x e^{tx}P(x) = 3\sum_{x=1}^{\infty} e^{tx}(1/4)^x$$

$$= 3\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{e^t}{4}\right)^x$$

$(e^t)^x(\frac{1}{4})^x$

$q = \frac{(e^t/4)^2}{(e^t/4)} = \frac{e^t}{4}$

$(\frac{e^t}{4})^x$

سری هندسی = $\frac{\text{جمله اول}}{1 - \text{قدر نسبت}} = \frac{a_1}{1-q}$ ، $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$

شرط همگرایی سری $\frac{e^t}{4} < 1$

عبارت اخیر یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $\frac{e^t}{4}$ است. چنانچه $\frac{e^t}{4} < 1$ (و یا به طور معادل $t < \ln 4$) سری فوق همگراست. پس

$$M_X(t) = 3\frac{e^t/4}{1 - e^t/4} = \frac{3e^t}{4 - e^t} \quad , \quad t < \ln 4$$

مشتق تابع مولد گشتاور عبارت است از

$$M'(t) = \frac{3e^t(4 - e^t) + 3e^{2t}}{(4 - e^t)^2} = \frac{12e^t}{(4 - e^t)^2} \quad \to M'(0) = \frac{4}{3}$$

بنابراین میانگین توزیع فوق برابر با $\mu_X = M'(0) = \frac{4}{3}$ است.

همچنین مشتق دوم $M_X(t)$ برابر است با

$$M''(t) = \frac{12e^t(4 - e^t)^2 + 24e^{2t}(4 - e^t)}{(4 - e^t)^4}$$

و لذا گشتاور مرتبه دوم توزیع برابر با $E(X^2) = M''(0) = \frac{20}{9}$ خواهد بود. بنابراین واریانس توزیع $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{20}{9} - \frac{16}{9} = \frac{4}{9}$ است.

مثال ۲.۱۰ تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است

$$P(x) = \frac{6}{\pi^2 x^2} \quad , \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

تابع مولد گشتاورهای X را، در صورت وجود، بیابید.

حل: داریم

$$M_X(t) = \sum_x e^{tx} P(x) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{tx}}{x^2}$$

می‌توان نشان داد که سری فوق برای $t > 0$ واگراست (مثلاً از دستور دالامبر)، بنابراین عدد $h > 0$ وجود ندارد که برای هر $t \in (-h, h)$، $M_X(t)$ وجود داشته باشد. پس متغیر تصادفی مورد بحث، دارای تابع مولد گشتاورها نیست.

۶.۲ توزیع برنولی و توزیع دوجمله‌ای

از این بخش به بعد، توزیع‌های گسسته مهم را معرفی می‌کنیم، و ویژگی‌های نظری و کاربردهای عملی آنها را توضیح می‌دهیم.

۶.۲ توزیع برنولی و توزیع دوجمله‌ای

یکی از رایج‌ترین آزمایش‌های تصادفی، آنهایی هستند که نتیجه آزمایش را می‌توان به دو حالت به صورت موفقیت یا شکست رده‌بندی کرد. این آزمایشها معروف به آزمایشهای برنولی هستند. چند مثال از این نوع آزمایشها عبارت‌اند از: پرتاب یک سکه (شیر یا خط)، پرتاب یک تاس (۶ یا غیر آن)، بررسی یک محصول (سالم یا معیوب)، نظرخواهی درباره یک طرح (موافق یا مخالف)، انتخاب یک مهره از جعبه‌ای حاوی تعدادی مهره سیاه و سفید و قرمز (سفید یا غیر سفید).

فرض کنید $X = ۱$ اگر نتیجه یک آزمایش برنولی موفقیت باشد و $X = ۰$ اگر نتیجه شکست باشد. چنانچه احتمال موفقیت در آزمایش را با p نشان دهیم، آنگاه

$X=1 \xrightarrow{P} P(X=1)=P$

$X=0 \quad P(X=0)=1-P$

$$P(۰) = P(X = ۰) = ۱ - p$$
$$P(۱) = P(X = ۱) = p.$$

$E(X) = 1 \times P + 0(1-P) = p$

$E(X^2) = E(X) = P$

$Var(X) = P - P^2 = P(1-P)$

تعریف ۸.۲ فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر باشد

$$P(x) = p^x(۱-p)^{۱-x} \quad x = ۰, ۱$$

در این صورت گوییم X دارای توزیع برنولی با پارامتر p است و می‌نویسیم $X \sim b(۱, p)$. اگر X دارای توزیع برنولی با پارامتر p باشد، آنگاه $E(X) = p$ و $V(X) = P(۱-p)$ (به عنوان تمرین، درستی این روابط را بررسی کنید).

اکنون فرض کنید یک آزمایش برنولی با احتمال موفقیت p را، n بار مستقلاً تکرار کنیم. نتیجه عبارت است از دنباله $(x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$ که دقیقاً مشخص می‌کند کدام یک از آزمایشها به پیروزی ختم شده و کدام به شکست منجر شده است. اغلب چنین اطلاعات دقیقی مورد نیاز نیستند و آنچه کلاً باید بدانیم عبارت است از X: "تعداد موفقیتها در n آزمایش". واضح است که X خود یک متغیر تصادفی گسسته با مقادیر ممکن $n, \ldots, ۱, ۰$ است. این متغیر تصادفی، متغیر تصادفی دوجمله‌ای نامیده می‌شود. برای یافتن تابع احتمال X توجه کنید که در دنباله‌ای از n آزمایش مستقل برنولی، احتمال هر دنباله خاص شامل x پیروزی (و در نتیجه $n-x$ شکست) برابر با $p^x(۱-p)^{n-x}$ است. از طرفی تعداد $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ دنباله متفاوت از n آزمایش شامل x پیروزی وجود دارد. پس احتمال x پیروزی در n آزمایش برابر است با $\binom{n}{x} p^x(۱-p)^{n-x}$. بر این مبنا، تعریف زیر را خواهیم داشت.

$P(X=2) = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$

$P_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$S_X = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

تعریف ۹.۲ فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر باشد

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad , \quad x = 0, 1, \cdots, n$$

در این صورت گوییم X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p است و می‌نویسیم $X \sim b(n, p)$.

توجه کنید که توزیع دوجمله‌ای به ازای $n = 1$، همان توزیع برنولی است. یادآور می‌شویم که چنانچه n یک عدد صحیح و مثبت باشد آنگاه $(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x}$. بنابراین اگر بسط دوجمله‌ای را برای $a = p$ و $b = 1 - p$ به‌کار بریم، مجموع احتمال‌های $P_X(x)$ برابر خواهد بود با

$$\sum_{x=0}^{n} P(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = (p + (1-p))^n = 1$$

نتیجه فوق با این واقعیت که $P_X(x)$ یک تابع احتمال است، سازگاری دارد.

اگر $X \sim b(n, p)$، می‌توان ثابت کرد که

$$E(X) = np \quad , \quad V(X) = np(1-p)$$

به عنوان تمرین، درستی روابط فوق را بررسی کنید (راهنمایی: برای محاسبه واریانس، ابتدا $E(X(X-1))$ و سپس $E(X^2)$ را بیابید.)

مثال ۱۱.۲ یک کارخانه، قطعات تولیدی‌اش را در جعبه‌های ۲۰تایی بسته‌بندی می‌کند. احتمال معیوب بودن هر قطعه ۰/۰۵ است.

الف) احتمال اینکه جعبه دلخواهی شامل ۲ معیوب باشد، چقدر است؟

$P(X=2) = \binom{20}{2}(0.05)^2(0.95)^{18}$

ب) احتمال اینکه جعبه دلخواهی شامل حداکثر ۲ معیوب باشد، چقدر است؟

$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

پ) امید ریاضی و واریانس تعداد قطعات معیوب هر جعبه چقدر است؟

$E(X) = 20 \times 0.05 \qquad Var(X) = 20(0.05)(0.95)$

حل: متغیر تصادفی X: "تعداد قطعات معیوب در هر بسته ۲۰تایی" را در نظر می‌گیریم. این متغیر دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n = 20$ و $p = 0/05$ است، یعنی

$$P(x) = \binom{20}{x} (0/05)^x (0/95)^{20-x} \quad x = 0, 1, \cdots, 20$$

الف)

$$P(X = 2) = \binom{20}{x} (0/05)^2 (0/95)^{20-2} = \frac{20!}{2! \times 18!} (0/05)^2 (0/95)^{18} = 0/19$$

به بیان دیگر، ۱۹ درصد از جعبه‌ها شامل ۲ کالای معیوب هستند.

ب)

$$
\begin{aligned}
P(X \leq ۲) &= P(X = ۰) + P(X = ۱) + P(X = ۲) \\
&= \binom{۲۰}{۰}(۰/۰۵)^{۰}(۰/۹۵)^{۲۰} + \binom{۲۰}{۱}(۰/۰۵)^{۱}(۰/۹۵)^{۱۹} \\
&\quad + \binom{۲۰}{۲}(۰/۰۵)^{۲}(۰/۹۵)^{۱۸} \\
&= ۰/۳۵۸ + ۰/۳۷۸ + ۰/۱۸۹ = ۰/۹۲۵
\end{aligned}
$$

پ)

$$
\begin{aligned}
E(X) &= np = ۲۰ \times ۰/۰۵ = ۱ \\
V(X) &= \sigma_X^۲ = np(۱-p) = ۲۰ \times ۰/۰۵ \times ۰/۹۵ = ۰/۹۵ \\
\sigma_X &= \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(۱-p)} = \sqrt{۰/۹۵} = ۰/۹۷
\end{aligned}
$$

از مثال بالا واضح است که وقتی n بزرگ باشد، محاسبه احتمال‌های توزیع دوجمله‌ای دشوار است. از آنجا که این توزیع کاربردهای مهم و متداولی دارد، جدول‌هایی برای احتمال‌های آن تهیه شده است. در جدول ۱ پیوست، احتمال‌های تجمعی $P(X \leq c) = \sum_{x=۰}^{c} P(x; n, p)$ برای چند مقدار n و p درج شده‌اند. احتمال‌های سایر پیشامدها را می‌توان برحسب پیشامدهایی به صورت $X \leq c$ نوشت و آنگاه از جدول استفاده کرد. روابط لازم عبارت‌اند از

$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$$
\begin{aligned}
P(X = x) &= P(X \leq x) - P(X \leq x - ۱) \\
P(X > x) &= ۱ - P(X \leq x) \\
P(a \leq x \leq b) &= P(X \leq b) - P(X \leq a - ۱)
\end{aligned}
$$

مثال ۱۲.۲ شانس جوانه زدن نوعی دانه‌ی گیاه، چنانچه در فصل معینی کاشته شود، ۷۰% است. اگر ۱۵ دانه‌ی این گیاه کاشته شود، تعیین کنید احتمال آنکه

الف) کمتر از ۱۰ دانه جوانه بزنند،

ب) دست کم ۸ دانه جوانه بزنند،

$n = 15$ و $P = \frac{70}{100}$

الف) $P(X<10) = P(X \leq 9)$ ، $\sum_{x=0}^{9} \binom{15}{x} (0.7)^x (0.3)^{15-x}$

ب) $P(X \geq 8)$ ، $\sum_{x=8}^{15} \binom{15}{x} (0.7)^x (0.3)^{15-x}$

$P_X(x) = \binom{15}{x} (0.7)^x (0.3)^{15-x}$ ، $x = 0, \dots, 15$

$a \leq X \leq b = \{X \leq b\} - \{X < a\}$

پ) تعداد جوانه‌ها دست کم ۶ و حداکثر ۱۲ باشد.

حل: متغیر تصادفی X: "تعداد دانه‌هایی که جوانه می‌زنند" را در نظر می‌گیریم. این متغیر دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n = ۱۵$ و $p = ۰/۷$ است. برای محاسبه احتمال‌ها از جدول ۱ پیوست و اعداد ستون $p = ۰/۷۰$ در قسمت $n = ۱۵$ استفاده می‌کنیم.

الف) با مراجعه به سطر $c = ۹$ ملاحظه می‌کنیم که $P(X < ۱۰) = P(X \leq ۹) = ۰/۲۷۸$

ب) $P(X \geq ۸) = ۱ - P(X < ۸) = ۱ - P(X \leq ۷) = ۱ - ۰/۰۵ = ۰/۹۵$

پ) $P(۶ \leq X \leq ۱۲) = P(X \leq ۱۲) - P(X \leq ۵) = ۰/۸۷۳ - ۰/۰۰۴ = ۰/۸۶۹$

← یکی از کاربردهای توزیع دوجمله‌ای، مسائل مربوط به نمونه‌گیری تصادفی با جایگذاری است. در نمونه‌گیری‌های با جایگذاری، پس از آنکه یک عضو از جامعه را انتخاب کردیم آن را به جامعه باز می‌گردانیم و آنگاه نمونه بعدی را انتخاب می‌کنیم. این کار باعث می‌شود که نتایج، مستقل از هم و هم‌توزیع باشند و دنباله‌ای از آزمایشهای برنولی را تشکیل دهند. در این موارد می‌توان از مدل دوجمله‌ای استفاده کرد.

خیلی مهم → **مثال ۱۳.۲ (نمونه‌گیری با جایگذاری)** جعبه‌ای حاوی ۱۰ مهره سفید و ۵ مهره قرمز است. شش مهره پیاپی و با جایگذاری استخراج می‌کنیم. احتمال آنکه دست‌کم ۵ مهره سفید مشاهده کنیم، چقدر است؟

حل: متغیر تصادفی X: "تعداد مهره‌های سفید در نمونه"، دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n = ۶$ و $p = \frac{۱۰}{۱۵} = \frac{۲}{۳}$ است. یعنی

$P(\text{سفید}) = p = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

$$P(x) = P(X = x) = \binom{۶}{x}\left(\frac{۲}{۳}\right)^x\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۶-x}, \quad x = ۰, ۱, \ldots, ۶$$

تعداد آزمایش انجام دادم

توزیع دوجمله‌ای

بنابراین

$$\begin{aligned} P(X \geq ۵) &= P(X = ۵) + P(X = ۶) \\ &= \binom{۶}{۵}\left(\frac{۲}{۳}\right)^۵\left(\frac{۱}{۳}\right) + \binom{۶}{۶}\left(\frac{۲}{۳}\right)^۶ = ۰/۳۵۱۲ \end{aligned}$$

دست کم ۵ مهره سفید

۷.۲ توزیع هندسی و توزیع دوجمله‌ای منفی

توزیع هندسی

انجام آزمایش تا رسیدن به اولین موفقیت

دنباله‌ای از آزمایش‌های برنولی با پارامتر p را در نظر بگیرید. فرض کنید بخواهیم آزمایش‌های مستقل را تا به دست آوردن اولین موفقیت تکرار کنیم. در چنین حالتی تعداد موفقیت‌ها عدد معین یک است، ولی تعداد آزمایش‌های لازم مشخص نیست بلکه یک متغیر تصادفی است که متغیر تصادفی هندسی نامیده می‌شود.

$M_X(t) = \sum e^{tx} \frac{p}{q} q^x = \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{\infty} (qe^t)^x = \frac{p}{q} \frac{qe^t}{1-qe^t} = \frac{pe^t}{1-qe^t}$

x = تکرار آزمایشات لازم برای رسیدن به اولین پیروزی در تکرار آزمایش برنولی با احتمال p

چنانچه این متغیر تصادفی را با X نشان دهیم، مقادیر ممکن X عبارت‌اند از ۱, ۲, ... در این صورت پیشامد $X = x$ رخ می‌دهد اگر و تنها اگر پس از $x - ۱$ شکست متوالی، یک موفقیت داشته باشیم، که احتمال آن برابر با $(۱ - p)^{x-۱}p$ است. بر این پایه تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۲.۱۰ فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر باشد

$$P(x) = P(X = x) = p(۱ - p)^{x-۱} \quad , \quad x = ۱, ۲, \cdots$$

در این صورت گوییم X دارای توزیع هندسی با پارامتر p است و می‌نویسیم $X \sim Ge(p)$. نام متغیر تصادفی هندسی، از این ناشی شده است که تابع احتمال آن یک تصاعد هندسی تشکیل می‌دهد. برای بررسی اینکه تابع فوق یک تابع احتمال است، توجه می‌کنیم که

$$\sum_{x=۱}^{\infty} P(x) = \sum_{x=۱}^{\infty} p(۱ - p)^{x-۱} = p \sum_{x=۱}^{\infty} (۱ - p)^{x-۱} = p \frac{۱}{۱ - (۱ - p)} = ۱$$

$P_X(x) = ۲(\frac{۱}{۳})^x$ ‏ $1-p$ تابع دو عنصر
$= (\frac{۲}{۳})(\frac{۱}{۳})^{x-۱}$ ‏ p

برای متغیر تصادفی هندسی با پارامتر p داریم

$$E(X) = \frac{۱}{p} \quad , \quad V(X) = \frac{۱ - p}{p^۲} \;\; \frac{۲/۳}{۱}$$

واریانس

به عنوان تمرین، درستی روابط فوق را بررسی کنید (راهنمایی: از عبارت داخل سری، نسبت به p مشتق بگیرید.)

مثال ۲.۱۴ یک توپ به سمت قرارگاه دشمن هدف‌گیری شده و متوالیاً شلیک می‌شود تا سرانجام قرارگاه مورد اصابت واقع گردد. در هر شلیک شانس اصابت گلوله به قرارگاه ۰/۲ است.

$p = ۲$
$P(X \le ۳) = P(X=۱) + P(X=۲) + P(X=۳)$ ‏ $n = ۳$

الف) احتمال اینکه با حداکثر ۳ شلیک قرارگاه مورد اصابت واقع شود، چقدر است؟

امید ریاضی

ب) انتظار داریم چند گلوله شلیک شود تا سرانجام گلوله‌ای به قرارگاه اصابت کند؟ $P(X=۱)+P(X=۲)+P(X=۳)$

پ) واریانس تعداد شلیک‌های لازم چقدر است؟

حل: متغیر تصادفی X: "تعداد شلیک‌های لازم تا اصابت یک گلوله به هدف" را در نظر بگیرید. با فرض استقلال شلیک‌ها (درباره‌ی برقراری این فرض بحث کنید)، X توزیع هندسی با $p = ۰/۲$ دارد. یعنی

$$P(x) = P(X = x) = ۰/۲(۰/۸)^{x-۱} \quad x = ۱, ۲, \cdots$$

الف) $P(x \le ۳) = P(x=۱) + P(x=۲) + P(x=۳) = ۰٫۲ + (۰٫۸)(۰٫۲) + (۰٫۸)^۲(۰٫۲) = ۰٫۲(۱ + ۰٫۸ + \dots$
$= ۰٫۲ \times ۲٫۴۴ = ۰٫۴۸۸$

ب) $E(X) = \frac{۱}{p} = \frac{۱}{۰٫۲} = ۵$ ‏ پ) $Var(X) = \frac{۱-p}{p^۲} = \frac{۰٫۸}{\dots} = \frac{۰٫۸}{\dots} = \frac{۸۰}{\dots} = ۲۰$

X: تعداد آزمایشات لازم برای رسیدن به r امین پیروزی

۸.۲۰ توزیع فوق هندسی $\quad P(X=x) = \binom{x-1}{x-r} p^r (1-p)^{x-r} \quad , \quad x = r, r+1, \ldots$

۶۹

از تغییر متغیر $k = x - r$ استفاده کنیم، می‌توانیم مجموع احتمال‌های دوجمله‌ای منفی را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}\sum_{x=r}^{\infty} P(x) &= \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{x-r} p^r (1-p)^{x-r} \\ &= p^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k} (1-p)^k \\ &= p^r (1-(1-p))^{-r} = 1\end{aligned}$$

$$\binom{n}{a} = \binom{n}{n-a}$$

$$\frac{n!}{a!(n-a)!} = \frac{n!}{(n-a)!a!}$$

r امین پیروزی

$$\underbrace{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots}_{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \cdots}\ \otimes \quad x$$

$$\binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$$

که نشان می‌دهد تابع $P_X(x)$ در تعریف بالا یک تابع احتمال است.

امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی عبارت‌اند از

$$E(X) = \frac{r}{p} \quad , \quad V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

به عنوان تمرین، درستی روابط فوق را بررسی کنید.

مثال ۲.۱۵ در مثال قبل فرض کنید برای نابودی قرارگاه دشمن اصابت ۳ گلوله توپ لازم است.

الف) فقط ۱۰ گلوله در انبار مهمات داریم. احتمال اینکه با شلیک حداکثر ۱۰ گلوله، هدف نابود شود چقدر است؟

ب) انتظار دارید با چند شلیک هدف نابود شود؟

حل: متغیر تصادفی X: "تعداد شلیک‌های لازم تا اصابت ۳ گلوله به هدف" را در نظر می‌گیریم. این متغیر توزیع دوجمله‌ای منفی با پارامترهای $r = 3$ و $p = 0/2$ دارد. یعنی

$$P(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{x-3} (0/2)^3 (0/8)^{x-3} \quad , \quad x = 3, 4, \ldots$$

الف) ممکن است (اگر خیلی خوش‌شانس باشیم!) هر سه شلیک اول به هدف اصابت کند و نیازی به شلیک‌های بعد نباشد، که در این صورت $X = 3$ خواهد بود. یا اینکه از سه‌تای اول دوتا به هدف بخورد و شلیک چهارم هم به هدف بخورد که در این حالت $X = 4$ خواهد بود و … . چون ۱۰ گلوله بیشتر نداریم، تمام حالاتی را که با حداکثر ۱۰ شلیک هدف نابود می‌شود در نظر می‌گیریم:

r امین پیروزی = سومین پیروزی

سومین پیروزی

$$\begin{aligned}P(X \leq 10) &= \sum_{x=3}^{10} P(x) = \sum_{x=3}^{10} \binom{x-1}{x-3} (0/2)^3 (0/8)^{x-3} \\ &= \binom{2}{0} (0/2)^3 (0/8)^0 + \cdots + \binom{9}{7} (0/2)^3 (0/8)^7 \\ &= 0/008 + \cdots + 0/060 = 0/322\end{aligned}$$

$$P_X(3) + P(4) + \cdots + P(10)$$

ب) $E(X) = \frac{r}{p} = \frac{۳}{۰/۲} = ۱۵$. آیا می‌توانید تعبیر عملی $E(X) = ۱۵$ را بیان کنید؟

۸.۲ توزیع فوق هندسی

یکی از مواردی که با آزمایش‌های برنولی سروکار داریم، حالتی است که یک شیء به تصادف از میان مجموعه‌ای متناهی مشتمل بر دو نوع شیء استخراج شود (مثلاً انتخاب یک مهره از جعبه‌ای حاوی تعدادی مهره سفید و قرمز). برای تکرار آزمایش به‌قسمی که نتایج مستقل و هم‌توزیع باشند لازم است پس از هربار نمونه‌گیری، مهره خارج شده را به جعبه بازگردانیم. این نوع نمونه‌گیری را در مثال ۱۴.۲ توضیح دادیم. همچنان که در آنجا بیان شد، فرایند فوق را نمونه‌گیری با جایگذاری گویند و مدل احتمال مناسب برای آن، توزیع دوجمله‌ای است. اما اگر نمونه‌گیری‌ها بدون جایگذاری انجام شود، آنگاه نتایج آزمایش‌ها مستقل و هم‌توزیع نخواهند بود و لذا شرایط استفاده از توزیع دوجمله‌ای برقرار نمی‌باشد. در این موارد مدل احتمال مناسب، توزیع فوق هندسی است که در این قسمت آن را بیان و تشریح می‌کنیم.

فرض کنید جعبه‌ای حاوی N مهره است که در میان آنها M مهره سفید و $N-M$تای دیگر قرمز هستند. نمونه‌ای nتایی از مهره‌های این جعبه به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. چنانچه X تعداد مهره‌های سفید در نمونه باشد، آنگاه، طبق قوانین شمارش،

$$P(x) = P(X = x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(۰, n-(N-M)) \leq x \leq \min(n, M)$$

تعریف ۱۲.۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال فوق باشد، در این صورت گوییم X دارای توزیع فوق هندسی با پارامترهای $(N, M; n)$ است، و می‌نویسیم $X \sim HG(N, M; n)$.

مثال ۱۶.۲ (نمونه‌گیری بدون جایگذاری) جعبه‌ای حاوی ۱۰ مهره سفید و ۵ مهره قرمز است. ۶ مهره پیاپی و بدون جایگذاری استخراج می‌کنیم. احتمال آنکه دست‌کم ۵ مهره سفید داشته باشیم، چقدر است؟

حل: متغیر تصادفی X: "تعداد مهره‌های سفید در نمونه"، دارای توزیع فوق هندسی با پارامترهای $M = ۱۰$، $N = ۱۵$ و $n = ۶$ است. یعنی

$$P(x) = P(X = x) = \frac{\binom{۱۰}{x}\binom{۵}{۶-x}}{\binom{۱۵}{۶}}, \quad ۱ \leq x \leq ۶$$

بنابراین

$$P(X \geq ۵) = P(X = ۵) + P(X = ۶)$$

$$\frac{\binom{۱۰}{۵}\binom{۵}{۱}}{\ } + \frac{\binom{۱۰}{۶}\binom{۵}{۰}}{\ }$$

$$= \frac{\binom{10}{5}\binom{5}{1}}{\binom{15}{6}} + \frac{\binom{10}{6}\binom{5}{0}}{\binom{15}{6}} = 0/252 + 0/042 = 0/294$$

نتیجه را با نتیجه مثال ۱۳.۲ مقایسه کنید.

۹.۲ فرآیند پوآسن و توزیع پوآسن

یکی از توزیع‌های گسسته که اهمیت نظری و عملی فراوانی دارد توزیع پوآسن است. قبل از آنکه متغیر تصادفی پوآسن و توزیع آن را تعریف کنیم، به بحث درباره آنچه «فرآیند پوآسن» نام دارد، می‌پردازیم. در بعضی آزمایش‌ها، وقایع موردنظر تعداد اتفاقاتی است که در فاصله زمانی (یا مکانی) معین رخ می‌دهند. برای نمونه، تعداد ارتباطات تلفنی در هر دقیقه در یک مرکز تلفن، تعداد ضایعاتی که در عایقکاری قطعات ۱۰۰ متری از سیم‌ها رخ می‌دهد، تعداد الکترون‌های تشعشع‌یافته از یک کاتد گرم شده در طول یک زمان ثابت، ... . از این گونه مثال‌ها بسیار می‌توان یافت. الگوی مناسب برای صورت‌بندی و تشریح این نوع مسائل، فرآیند پوآسن است.

تعریف ۱۳.۲ چنانچه تعداد اتفاقاتی که در یک فاصله پیوسته (زمان، طول، ...) رخ می‌دهد در شرایط زیر صدق کند گوییم یک فرآیند پوآسن با پارامتر λ وقوع یافته است.

الف) نرخ: احتمال رخ دادن دقیقاً یک اتفاق در فاصله کوچک h تقریباً برابر λh (متناسب با طول فاصله باشد، یعنی

$\lambda \quad 1 \rightarrow x = h\lambda$

$(\lambda) \quad h$

$$P(\text{(رخ دادن یک اتفاق در فاصله}(t, t+h)) \simeq \lambda h$$

۱- احتمال رخ دادن دقیقا یک اتفاق در فاصله

ب) با هم نیامدن: احتمال رخ دادن دو اتفاق یا بیشتر در هر فاصله کوچک تقریباً صفر باشد، یعنی

۲- عدم صدور رخ دادن ۲ اتفاق در یک فاصله

$$P(\text{(رخ دادن بیش از یک اتفاق در فاصله}(t, t+h)) \simeq 0$$

۳- رخ دادن اتفاقات جدا مستقل از هم باشد.

پ) استقلال: رخ دادن اتفاقات در فواصل زمانی جدا، مستقل از هم باشند.

از شرایط الف و ب به سادگی معلوم می‌شود که برای مقادیر کوچک h

$$P(\text{(هیچ رخدادی در فاصله}(t, t+h)) \simeq 1 - \lambda h$$

فرض کنید $N(t)$ تعداد اتفاقات در فاصله زمانی با طول t باشد. می‌خواهیم تابع احتمال $N(t)$ را که یک متغیر تصادفی گسسته است بیابیم. فاصله زمانی با طول t را با فاصله $[0, t]$ در نظر می‌گیریم. (با توجه به شرط پ این فاصله می‌تواند نماینده هر فاصله‌ای با طول t باشد). این فاصله را به n فاصله کوتاه هر کدام

با طول $\frac{t}{n}$ تقسیم می‌کنیم. اگر n بقدر کافی بزرگ باشد آنگاه، بنا به شرط‌های الف و ب، در هریک از این فاصله‌های کوتاه هیچ یا یک اتفاق رخ می‌دهد. بعلاوه آنچه در یک فاصله رخ می‌دهد تأثیری بر احتمال آنچه در نواحی مجزای دیگر رخ می‌دهد ندارد (شرط پ). لذا می‌توان وقوع یا عدم وقوع یک اتفاق در هر فاصله کوتاه را یک آزمایش برنولی با پارامتر $p = \frac{\lambda t}{n}$ در نظر گرفت و در نتیجه $N(t)$ یعنی تعداد اتفاقات در فاصله $[0, t]$ به طور تقریبی یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای n و $p = \frac{\lambda t}{n}$ است، یعنی

$$P(N(t) = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \quad , \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

برای تقریب بهتر، n را بزرگتر می‌کنیم. اگر $n \to \infty$ (یعنی طول فواصل کوتاه، به سمت صفر میل کند)، آنگاه تابع احتمال دقیق $N(t)$ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} P(N(t) = k) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^k} \end{aligned}$$

اما

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n = e^{-\lambda t} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = 1 \, ,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^k = 1$$

رخ دادن اتفاق در واحد زمانی t

پس تابع احتمال $N(t)$ عبارت است از

$$P(N(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

چنانچه در فرآیند پوآسن متغیر تصادفی X، تعداد اتفاقات در فاصله‌ای "به طول یک" باشد ("طول یک" نمایش یک واحد از کمیت موردنظر است)، آنگاه X دارای تابع احتمال فوق با پارامتر $\lambda t = \lambda \times 1 = \lambda$ است. اکنون توزیع پوآسن را تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱.۴.۲ فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر باشد

$$P(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad , \quad x = 0, 1, \ldots$$

در این صورت گوییم X توزیع پوآسن با پارامتر λ دارد و می‌نویسیم $X \sim P(\lambda)$.

مهم

با توجه به فرمول بسط e^λ، یعنی $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^\lambda$، به آسانی می‌توان تحقیق کرد که تابع $P(x)$ یک تابع احتمال است.

از مطالب بالا روشن است که توزیع پوآسن ویژگی جمع‌پذیری دارد. یعنی اگر تعداد اتفاقات در یک واحد زمانی یا طولی توزیع پوآسن با پارامتر λ داشته باشد، آنگاه تعداد اتفاقات در فاصله زمانی t دارای توزیع پوآسن با پارامتر λt است.

$x = \lambda t$

اگر X دارای توزیع پوآسن با پارامتر λ باشد، آنگاه

$$E(X) = \lambda \ , \quad V(X) = \lambda$$

امید ریاضی و واریانس برای توزیع پواسن

به عنوان تمرین، درستی این روابط را بررسی کنید (راهنمایی: برای واریانس ابتدا $E(X(X-1))$ را بیابید). این روابط بیان می‌کنند که در توزیع پوآسن میانگین و واریانس با هم مساوی هستند و برابر با پارامتر توزیع می‌باشند. این واقعیت که در توزیع پوآسن امید ریاضی برابر با پارامتر λ است، کمک می‌کند تا در مسائل عملی چنانچه λ مجهول باشد، از میانگین مشاهدات به عنوان تخمینی برای λ استفاده کنیم.

در ادامه مثال‌هایی می‌آوریم که در آنها برقراری شرایط سه‌گانه‌ی یک فرآیند پوآسن پذیرفتنی است، و لذا توزیع پوآسن یک مدل احتمال مناسب برای آنها می‌باشد. شایسته است خواننده در هر مثال درباره‌ی برقراری این شرایط بحث کند.

مثال ۱۷.۲ مشاهدات گذشته نشان داده است که در کارخانه شهاب، به طور متوسط ۳ حادثه انسانی در هر ماه اتفاق می‌افتد.

واحد: ماه

الف) تابع احتمال تعداد حوادث ماهانه را بنویسید.

ب) احتمال اینکه در طول یک ماه حادثه‌ای رخ ندهد، چقدر است؟

پ) احتمال اینکه در طول یک ماه حداکثر دو حادثه رخ دهد، چقدر است؟

حل: الف) منطقی است فرض کنیم که متغیر تصادفی X: "تعداد حوادث ماهانه" دارای توزیع پوآسن باشد. با توجه به اینکه در توزیع پوآسن $E(X) = \lambda$ پس در این مثال $\lambda = ۳$ است و لذا

$$P(x) = P(X = x) = \frac{e^{-۳}۳^x}{x!} \quad , \quad x = ۰, ۱, ۲, \dots$$

ب)

$$P(۰) = P(X = ۰) = \frac{e^{-۳}۳^۰}{۰!} = e^{-۳} = ۰/۰۵۰$$

پ)

$$\begin{aligned} P(X \le 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= e^{-3} + \frac{e^{-3}3^1}{1!} + \frac{e^{-3}3^2}{2!} \\ &= 0.050 + 0.149 + 0.224 = 0.423 \end{aligned}$$

$e^{-\lambda}$

برای احتمال‌های توزیع پوآسن نیز جداولی تهیه شده است. در جدول ۲ پیوست، احتمال‌های تجمعی $P(X \le c) = \sum_{x=0}^{c} P(x;\lambda)$ برای چند مقدار متداول λ درج شده‌اند. برای نمونه جواب قسمت پ مثال بالا را می‌توان از جدول پوآسن در ستون $\lambda = 3$ و سطر $c = 2$ به دست آورد.

مثال ۲.۱۸ در تولید یک نوع پارچه، به طور متوسط در هر ۱۰ متر یک زدگی بوجود می‌آید. مطلوب است

$\lambda = 1$

الف) احتمال وجود حداکثر یک زدگی در ۱۰ متر پارچه،

ب) احتمال وجود حداکثر دو زدگی در ۲۰ متر پارچه. $\longleftarrow \lambda = 2$

حل: الف) متغیر تصادفی X: "تعداد زدگی در ۱۰ متر پارچه" توزیع پوآسن با $\lambda = 1$ دارد، یعنی

$$P(x) = P(X = x) = \frac{e^{-1}1^x}{x!} \quad , \quad x = 0, 1, \cdots$$

پس

$$\begin{aligned} P(X \le 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= \frac{e^{-1}}{0!} + \frac{e^{-1}}{1!} = 0.736 \end{aligned}$$

ب) متغیر تصادفی Y: "تعداد زدگی در ۲۰ متر پارچه" توزیع پوآسن با $\lambda = 2$ دارد، یعنی

$$P(Y = y) = \frac{e^{-2}2^y}{y!} \quad , \quad y = 0, 1, \cdots$$

بنابراین

$$\begin{aligned} P(Y \le 2) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) \\ &= \frac{e^{-2}2^0}{0!} + \frac{e^{-2}2^1}{1!} + \frac{e^{-2}2^2}{2!} = 0.677 \end{aligned}$$

این مقدار از جدول پوآسن، ستون $۲ = \lambda$ و سطر $۲ = c$ نیز به دست می‌آید.

λ $t=$ هر سال

مثال ۱۹.۲ در ناحیه‌ای از استان گیلان به طور متوسط هر سال ۵ سیلاب (با دبی بالا) اتفاق می‌افتد.

الف) احتمال آنکه در یک سال خاص بیش از ۵ سیلاب رخ دهد، چقدر است؟

ب) یک سال را بحرانی گوییم اگر شاهد ۱۰ سیلاب یا بیشتر باشیم. احتمال آنکه در دوره ۲۰ ساله آینده سال بحرانی نداشته یا فقط یک سال بحرانی داشته باشیم، چقدر است؟

حل: الف) تعداد سیلاب‌های سالانه توزیع پوآسن با میانگین $۵ = \lambda$ دارد، یعنی

$$P(X=x) = \frac{e^{-۵}۵^x}{x!} \quad , \quad x = ۰, ۱, \cdots$$

تعداد سیلاب

بنابراین، با استفاده از جدول پوآسن

۴و۳و۲و۱و۰

$$P(X > ۵) = ۱ - P(X \leq ۴) = ۱ - ۰/۴۴۰ = ۰/۵۶$$

ب) احتمال آنکه یک سال خاص بحرانی باشد، عبارت است از

$$P(X \geq ۱۰) = ۱ - P(X \leq ۹) = ۱ - ۰/۹۶۸ = ۰/۰۳۲ = P$$

حال متغیر تصادفی Y را "تعداد سال‌های بحرانی در ۲۰ سال" می‌گیریم. این متغیر دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $۲۰ = n$ و $۰/۰۳۲ = p$ است، یعنی

$$P(Y=y) = \binom{۲۰}{y}(۰/۰۳۲)^y(۰/۹۶۸)^{۲۰-y} \quad y = ۰, ۱, \cdots$$

توزیع دوجمله‌ای

بنابراین

$$\begin{aligned} P(Y \leq ۱) &= P(Y=۰) + P(Y=۱) \\ &= \binom{۲۰}{۰}(۰/۰۳۲)^۰(۰/۹۶۸)^{۲۰} + \binom{۲۰}{۱}(۰/۰۳۲)^۱(۰/۹۶۸)^{۱۹} \\ &= ۰/۵۲۲ + ۰/۵۲۲ = ۰/۸۶۷ \end{aligned}$$

بحرانی نیست ۱سال بحرانی ۱۹سال بحرانی نیست

$\binom{n}{x}$ $n \to \infty$, $np < ۱۰$

تقریب دوجمله‌ای با پوآسن

همچنان که از بحث فرآیند پوآسن آشکار است، توزیع پوآسن را می‌توان به عنوان یک تقریب برای توزیع دوجمله‌ای، هنگامی‌که n (تعداد آزمایش‌ها) خیلی بزرگ و p (شانس موفقیت در هر آزمایش) خیلی کوچک

$$X \sim B(n, P) \longrightarrow X \sim P(np = \lambda)$$

باشد، در نظر گرفت. واضح است که np یعنی میانگین توزیع دوجمله‌ای نقش λ را، که در توزیع پوآسن میانگین است، ایفا می‌کند. در عمل اگر $n \geq ۲۰$ و $p \leq ۰/۰۵$ تقریب به اندازه کافی دقیق است و هرگاه $n \geq ۱۰۰$ و $np \leq ۱۰$ این تقریب خیلی خوب است.

مثال ۲.۲۰ تجربه نشان داده است که ۰/۰۲ از ترانزیستورهای کارخانه ایران الکتریک در کمتر از یک ساعت از کار می‌افتند. احتمال آن را بیابید که در یک محموله ۲۰۰ تایی حداکثر ۳ ترانزیستور معیوب وجود داشته باشد.

حل: متغیر تصادفی X: "تعداد ترانزیستورهای معیوب در محموله" توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n = ۲۰۰$ و $p = ۰/۰۲$ دارد، و لذا

$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

$P(X=x) = \binom{200}{x} 0/02^x (0/98)^{n-x}$ $x = 0, 1, 2, 3$

$$P(X \leq ۳) = \sum_{x=0}^{۳} \binom{۲۰۰}{x} (۰/۰۲)^x (۰/۹۸)^{۲۰۰-x}$$

از کار افتاده   سالم

با محاسبات لازم، مقدار فوق برابر ۰/۴۳۲ به دست می‌آید.

از طرف دیگر، و با توجه به اینکه n بزرگ و p کوچک است، می‌توانیم از تقریب پوآسن با $\lambda = ۲۰۰ \times ۰/۰۲ = ۴$ استفاده کنیم. خواهیم داشت

$\lambda = P \times n$

$$P(X \leq ۳) \simeq \sum_{x=0}^{۳} \frac{e^{-۴}۴^x}{x!} = ۰/۴۳۳$$

$x = 0, 1, 2, 3$

ملاحظه می‌کنید که استفاده از توزیع پوآسن که محاسبات بسیار ساده‌تری دارد، منجر به نتیجه‌ای شده است که به جواب واقعی بسیار نزدیک است.

$\sum_{n=1}^{4} f(n) = f(1) + f(2) + \cdots$

$۳^۳ = ۲۷$

تمرین‌های فصل دوم

۱.۲ در یک واکنش هسته‌ای، ذره معینی ممکن است به ۲ یا ۳ ذره شکافته شود یا اصلاً شکافته نشود. احتمال این امکان‌ها $p_۳$، $p_۲$ و $p_۱$ اند. ذره‌های جدید مستقل از یکدیگر و مانند واکنش قبلی عمل می‌کنند. توزیع تعداد کل ذرات را بعد از ۲ واکنش پیدا کنید.

۲.۲ فرض کنید X تعداد کل استکان‌ها (لیوان‌ها)ی چای باشد که در شبانه‌روز می‌نوشید. برطبق تجربیات گذشته، یک تابع احتمال مناسب برای X بنویسید.

۳.۲ فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد. آیا درست است که: $X - X = ۰$ و $X + X = ۲X$. مطلب را به تفصیل شرح دهید.

۴.۲ برای تابع احتمال زیر

x	۲	۳	۴	۵	۶
$P(x)$	۰/۱	۰/۳	۰/۳	۰/۲	۰/۱

$x \geq ۴$

الف) نمودار میله‌ای تابع احتمال را رسم کنید.

ب) $E(X)$ را محاسبه کنید. امید ریاضی

$P(Y) =$

پ) $P(X \geq ۴)$ و $P(۲ < X \leq ۴)$ را به دست آورید.

۵.۲ توپ‌هایی به شماره‌های ۱ تا N در یک کیسه قرار دارند. تعداد n $(n \leq N)$ توپ را بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. فرض کنید Y نشان دهنده بزرگترین عدد انتخاب شده باشد. تابع چگالی احتمال Y را بیابید.

۶.۲ در هریک از حالت‌های زیر مقدار ثابت c را چنان تعیین کنید که $f(x)$ دارای شرط‌های تابع چگالی احتمال باشد. در هر مورد امید ریاضی و واریانس را بیابید.

$p(x) \geq ۰$

یکشون برابر یکه

الف) $f(x) = \frac{x}{c}$ ، $x = ۱, ۲, ۳, ۴$

ب) $f(x) = cx$ ، $x = ۱, ۲, \cdots, ۱۰$

پ) $f(x) = c(\frac{۱}{۴})^x$ ، $x = ۱, ۲, ۳, \cdots$

ت) $f(x) = c(x + ۱)^۲$ ، $x = ۰, ۱, ۲, ۳$

۷.۲ تعداد لکه‌های رنگ در هر متر از یک نوع پارچه (X)، متغیر تصادفی پواسن با میانگین ۰/۲ است.

الف) $P(X = ۲)$ و $P(X \leq ۱)$ را بیابید و تعبیر کنید.

تعداد لکه‌ها ۲ تا باشه در ۱ متر پارچه

ب) نمودار تابع احتمال X را رسم کنید. آیا این تابع چاوله است؟ اگر هست، در چه جهتی؟

۸.۲ در تمرین بالا، فرض کنید تعداد لکه‌های چاپی در هر متر از همان نوع پارچه (Y)، نیز دارای توزیع پواسن با میانگین $\lambda = ۰/۱$ است. فرض کنید Y از X مستقل باشد.

الف) متغیر تصادفی $T = X + Y$ چه چیزی را توصیف می‌کند و چه توزیعی دارد؟

$X + Y \sim P(0/3)$

ب) محتمل‌ترین تعداد کل لکه‌ها در یک متر پارچه چقدر است؟

$P(T=0) = e^{-0/3}$

$P(T=1) = e^{-0/3} \times 0/3$

$P(T=2) = \frac{e^{-0/3}(0/3)^2}{2!}$

پ) فرض کنید برای یک مصرف خاص، پارچه‌ها در قواره‌های ۵ متری بریده می‌شوند. اگر قواره‌هایی که تعداد کل لکه‌های آنها بیش از ۳ است دور ریخته شوند، چند درصد از قواره‌ها دور ریخته خواهند شد؟

۹.۲ در یک مسابقه بسکتبال قرار است افشین ده پرتاب آزاد انجام دهد. فرض کنید $X_i = ۱$ اگر iامین پرتاب وی موفقیت‌آمیز باشد، و $X_i = ۰$ در غیر این صورت. متغیر تصادفی $X = X_1 + \cdots + X_{10}$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟ تحت چه شرایطی X متغیر تصادفی دوجمله‌ای است؟

۱۰.۲ یک رل پارچه به عرض یک متر به طور متوسط دارای ۸ عیب می‌باشد که در ۱۰۰ متر آن پخش است. قطعات پارچه به ابعاد ۶ متر از رل قیچی می‌شوند. مطلوب است احتمال اینکه

$\lambda = 0/48 \Rightarrow P(X=0) = e^{-0/48} = 0/6187 = p$

الف) یک قطعه دارای هیچ عیب نباشد،

$P(Y=5) + P(Y=6) = \binom{6}{5} p^5(1-p) + \binom{6}{6} p^6$

ب) از ۶ قطعه‌ی انتخاب شده حداکثر یک قطعه دارای عیب باشد.

۱۱.۲ آیا مدل آزمایش‌های برنولی، برای هریک از موارد زیر، مدل مناسبی است؟ در کدام مورد ممکن است فرض‌های مدل به طور جدی نقض شوند؟ شرح دهید:

الف) تعدادی حشره در اطراف یک نقطه پخش شده‌اند و مقداری ماده حشره‌کش را نیز به صورت متمرکز در جایی ریخته‌اند. پیشامد مردن یا زنده ماندن هر حشره ثبت می‌گردد.

ب) ۱۰ نوآموز کلاس اول تحت آزمون تداعی لغت قرار می‌گیرند و زمانی که برای هر نوآموز لازم است تا آزمون را انجام دهد، ثبت می‌شود.

پ) کالاهایی که از خط تولید خارج می‌شوند بازرسی شده و به دو رده سالم و معیوب تقسیم می‌شوند.

ت) هریک از ۱۰ روز اول ماه فروردین مورد مشاهده قرار می‌گیرد تا بررسی شود که ابری است یا آفتابی.

ث) از بین ۵۰ نفر، ۲۰ نفر را به تصادف برمی‌گزینند و بررسی می‌کنند که کدام چپ دست است و کدام راست دست.

۱۲.۲ یک پیمانکار محموله‌ای شامل ۱۰۰ مونیتور را خریداری می‌کند. سیاست پیمانکار این است که

۱۰ مونیتور را امتحان می‌کند و در صورتی محموله را قبول می‌کند که حداقل ۹ تا از مونیتورها سالم باشند. فرض کنید محموله شامل ۸ مونیتور معیوب باشد. تابع احتمال X: "تعداد مونیتورهای معیوب در نمونه" را بنویسید. چقدر احتمال دارد که پیمانکار محموله را بپذیرد؟

۱۳.۲ نوع خاصی از موتور هواپیما با احتمال ۰/۹۹ هشت ساعت بدون از کار افتادگی کار می‌کند. فرض کنید که یک هواپیمای دو موتوره بتواند دست‌کم با یک موتور و یک هواپیمای چهار موتوره بتواند دست‌کم با دو موتور پرواز کند. از کار افتادگی موتورها را مستقل از هم فرض می‌کنیم. اگر یک هواپیمای دو موتوره و یک هواپیمای چهار موتوره برای هشت ساعت شروع به پرواز کنند، نشان دهید که سقوط هواپیمای دو موتوره ۲۵ برابر محتمل‌تر از سقوط هواپیمای چهار موتوره است.

۱۴.۲ جعبه‌ای شامل ۱۰ لامپ است که ۸ تای آنها سالم هستند. اگر از این جعبه ۵ لامپ به تصادف انتخاب کنیم، تابع احتمال تعداد لامپ‌های سالم چیست؟ تابع احتمال تعداد لامپ‌های ناسالم چیست؟

۱۵.۲ برای تابع احتمال زیر

x	۰	۱	۲	۳
$P(x)$	۰/۳	۰/۴	۰/۲	۰/۱

مطلوب است محاسبه‌ی

الف) $P(X \geq ۲)$ ب) $P(۰ < X \leq ۲)$

پ) $E(X)$ ت) $V(X)$, σ_X

۱۶.۲ اگر متوسط تعداد درخواست‌های روزانه از یک شرکت بیمه ۵ باشد، نسبت روزهایی که کمتر از ۳ درخواست می‌شود چقدر است؟ احتمال اینکه دقیقاً ۴ درخواست در ۳ روز از ۵ روز آینده وجود داشته باشد، چقدر است؟ (فرض کنید تعداد درخواست‌ها در روزهای مختلف مستقل باشند.)

۱۷.۲ شرکت بیمه آسیا قایق‌های ۱۵۰۰ نفر را برای مدت دو سال در مقابل دزدی بیمه می‌کند. چنانچه شرکت بابت هر قایق دزدیده شده مبلغ ۳۰۰۰ تومان بپردازد دارای سود و زیان برابر خواهد بود. اگر احتمال دزدیده شدن قایق یک نفر در مدت اعتبار بیمه‌نامه ۰/۱۵ باشد، با این فرض که هر قایق فقط یک‌بار ممکن است دزدیده شود،

الف) مبلغ بیمه چقدر باید باشد؟

ب) اگر احتمال دزدی ۰/۱ باشد، امید ریاضی سود شرکت برای هر مورد بیمه، با مبلغ تعیین شده در بند

$$\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

(الف)، چقدر است؟

۱۸.۲ به طور تجربی مشاهده شده است تصادفات رانندگی در تعطیلات آخر هفته در جاده‌های اصلی استان گرگان به نسبت ۵ تلفات در ساعت رخ می‌دهد. اگر فرض کنیم که این تلفات به طور مستقل رخ دهند، احتمال اینکه یک دوره ۱ ساعته بی‌تلفات سپری شود چقدر است؟ یک دوره ۱۵ دقیقه‌ای چقدر؟ چهار دوره ۱۵ دقیقه‌ای مجزای متوالی بی‌تلفات سپری شود چقدر؟

۱۹.۲ تجارب گذشته نشان داده است که در ایران از هر ۱۰۵۴۰ نوزاد، یکی نابینا به دنیا می‌آید. فرض کنید که در یک زایشگاه بزرگ شهر اصفهان در سال ۱۳۸۰، ۲۱۵۰ نوزاد به دنیا آمده است. احتمال پیشامد "هیچ‌یک از بچه‌هایی که در سال ۱۳۸۰ در زایشگاه فوق متولد شده‌اند، هنگام تولد نابینا نبوده باشند" را، با توزیع پواسن تقریب بزنید.

۲۰.۲ ۳٪ از دانش‌آموزان یک شهر بزرگ، دارای بهره هوشی ۱۳۰ یا بیشتر هستند. برای نمونه‌ای تصادفی به حجم ۵۰ از این دانش‌آموزان، از تقریب پواسن استفاده کرده $P(X=2)$ و $P(X \geq 3)$ را حساب کنید، که در آنها X عبارت است از تعداد دانش‌آموزانی که نمره ۱۳۰ یا بیشتر دارند.

$\lambda = np = ۱۳۰ \times \frac{۳}{۱۰۰} = ۳/۹$

$P(X=۲) = \frac{e^{-۳/۹}(۳/۹)^۲}{۲!}$

۲۱.۲ ۴۵ درصد از اعضای یک جامعه‌ی ۱۲۵۰۰ نفری، طرفدار پیشنهاد معینی هستند. احتمال آنکه بین ۱۰ رأی‌دهنده که به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌شوند، ۶ نفر یا بیشتر طرفدار آن پیشنهاد باشند، چقدر است؟

$\frac{۴۵}{۱۰۰} \times ۱۲۵۰۰ =$

$P(X \geq ۶) = P(X=۶) + P(X=۷) + \cdots + P(X=۱۰)$

$= \frac{\binom{۵۶۲۵}{۶}\binom{۶۸۷۵}{۴}}{\binom{۱۲۵۰۰}{۱۰}} +$

۲۲.۲ تحقیق کنید که تابع

$$F_T(t) = \begin{cases} ۰ & t < -۳ \\ \frac{۱}{۲} & -۳ < t < -۱ \\ \frac{۲}{۲} & -۱ < t < ۰ \\ ۱ & t \geq ۰ \end{cases}$$

یک تابع توزیع احتمال است. تابع احتمال T را به دست آورید. تابع توزیع و تابع احتمال را رسم کنید.

۲۳.۲ متغیر تصادفی Z دارای تابع احتمال زیر است

$$P_Z(z) = \begin{cases} \frac{۱}{۴} & z = ۰, ۱, ۲, ۵ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

تابع توزیع Z را بیابید و رسم کنید.

$$F_Z(z) = \begin{cases} ۰ & z < ۰ \\ \frac{۱}{۴} & ۰ \leq z < ۱ \\ \frac{۲}{۴} & ۱ \leq z < ۲ \\ \frac{۳}{۴} & ۲ \leq z < ۵ \\ ۱ & z \geq ۵ \end{cases}$$

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ ۱۰۱

۲۴.۲ یک کارگاه تولیدی با چهار کارگر کار می‌کند. این کارگاه با سه کارگر نیز می‌تواند کار کند ولی درآمد آن به ۰/۶۰ درآمد ظرفیت کامل تقلیل می‌یابد. اگر بیش از یک کارگر غایب شود، کار متوقف می‌گردد. یکی از کارگرها به طور متوسط ۱۰ روز از ۱۰۰ روز غایب می‌باشد و هر یک از سه کارگر دیگر به طور متوسط ۵ روز از ۱۰۰ روز غایب می‌باشند. غیبت‌ها به طور تصادفی و مستقل از هم رخ می‌دهند. اگر کارگاه فعال باشد هزینه‌های روزانه آن ۴۵۰ (هزار ریال) و اگر متوقف باشد ۱۸۰ (هزار ریال) است. درآمد روزانه کارگاه در ظرفیت کامل ۸۰۰ (هزار ریال) است. سود مورد انتظار روزانه این کارگاه چقدر است؟ (هزینه _ درآمد = سود)

۲۵.۲ در طراحی یک ایستگاه پمپاژ قرار است که ۶ دستگاه پمپ مشابه هم هر یک به ظرفیت ۱۵۰۰۰ (لیتر در ساعت) نصب گردد. در هر زمان خاص، احتمال آن که هر یک از پمپ‌ها قابل استفاده نباشد، مستقل از دیگر پمپ‌ها، ۰/۰۵ است.

الف) مقدار مورد انتظار ظرفیت قابل استفاده چقدر است؟

ب) چنانچه نیاز به پمپاژ ۷۴۰۰۰ (لیتر در ساعت) توسط ایستگاه مطرح باشد، احتمال برآورده نشدن نیاز چقدر است؟

پ) محاسبات بندهای الف و ب را برای طرحی که دو دستگاه از شش دستگاه، توسط یک دستگاه پمپ با ظرفیت ۳۰۰۰۰ (لیتر در ساعت) با احتمال قابل استفاده نبودن ۰/۱۰ جایگزین شود، تکرار کنید.

$E(X) = 2 \times \frac{90}{100} = \frac{180}{100} = 1{,}8 \times$ + ۵٫۶×۱۵۰۰۰

$4 \times \frac{95}{100} = 3{,}8$

۲۶.۲ فرض کنید

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x = 2, 4, 8, 16 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

P(برآورده نشدن) = ۱ − P(برآورده شدن) $= 1 - [(0{,}95)^4 (0{,}9) + \binom{4}{1} (0{,}95)^3 (0{,}05)^1 (0{,}9)]$

مطلوب است محاسبه‌ی

۱) همه کار کنند (همه پمپ‌ها)
۲) ۲ تا ۱۵۰۰۰ کار کنند

الف) $E(X)$ ب) $E(X^2)$ پ) $E(\frac{1}{X})$

ت) $E(2^{X/2})$ د) $V_X(X)$ و σ_X.

۲۷.۲ تعداد دفعاتی که یک کارگر معدن در طول سال دچار ناراحتی ریوی می‌شود متغیر تصادفی پواسن با پارامتر $\lambda = 3$ است. فرض کنید که یک داروی جدید وارد بازار شده که پارامتر پواسن را برای ۷۵ درصد کارگران به $\lambda = 2$ کاهش می‌دهد و برای ۲۵ درصد بقیه تأثیری ندارد. در صورتی که یک کارگر از این دارو در طول سال استفاده کند و ۲ بار در سال مبتلا به ناراحتی ریوی شود، با چه احتمالی دارو برای او B A_2

P(موثر بودن دارو | شخص ۲ بار مریض شد) $= \frac{P(A_2|B)\,P(B)}{P(A_2)} = \frac{\frac{e^{-2} 2^2}{2!} \times \frac{75}{100}}{}$

$$P(A_c) = P(A_c|B)P(B) + P(A_c|\bar{B})P(\bar{B}) = \frac{e^{-2}2^2}{2!} \times \frac{75}{100} + \frac{e^{-3}3^2}{2!} \times \frac{25}{100}$$

مؤثر بوده است.

۲۸.۲ نرخ خودکشی در ایران، ۱ در ۱۰۰۰۰۰ نفر در ماه است.

الف) احتمال اینکه در یک شهر ۲۰۰۰۰۰ نفری در یک ماه ۸ خودکشی یا بیشتر اتفاق افتد، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه در شهر فوق در حداقل ۲ ماه در سال ۸ خودکشی یا بیشتر وجود داشته باشد، چیست؟

پ) با شمارش ماه حاضر به عنوان ماه شماره ۱، احتمال اینکه اولین ماه شامل ۸ خودکشی یا بیشتر، ماه iام $(i \geq 1)$ باشد چقدر است؟ برای حل بندهای الف تا پ چه فرض‌هایی می‌کنید.

۲۹.۲ ظرفی حاوی سه مهره سفید و هفت مهره سیاه است. از این ظرف مهره‌ها یکی بعد از دیگری (بدون جایگذاری) استخراج می‌شوند. توزیع تعداد مهره‌های سیاه خارج شده قبل از استخراج یک مهره سفید را تعیین کنید. مسئله را برای حالت با جایگذاری نیز حل کنید.

۳۰.۲ احتمال اینکه یک ماشین، کالایی معیوب تولید کند ۰/۰۰۲ است. هر کالای تولید شده بررسی می‌شود. فرض می‌کنیم که تولیدها آزمایش‌های مستقل‌اند. حساب کنید احتمال اینکه تا ۵۰۰ کالا که بررسی خواهد شد، حداکثر دو معیوب مشاهده شود.

۳۱.۲ به منظور تعیین درصد تعداد رأی‌دهندگان به نفع کاندیدای خاصی، از تعداد کافی از رأی‌دهندگان نظرخواهی شده است. فرض کنید که نسبت نامعلومی مانند p از رأی‌دهندگان به انتخاب این کاندیدا تمایل داشته و مستقل از یکدیگر عمل کنند. برای آنکه بتوانیم p را با اطمینان ۹۵٪ و با اختلافی کمتر از ۳٪ پیشگویی کنیم، نظرخواهی از چند نفر ضروری است؟

۳۲.۲ دو سینما برای جلب ۱۰۰۰ مشتری با هم رقابت دارند. فرض کنید که هریک از مشتریان با بی‌تفاوتی کامل، و مستقل از دیگر مشتریان یکی از دو سینما را انتخاب می‌کند. هر سالن سینما باید چند صندلی داشته باشد تا احتمال جواب کردن یک مشتری به خاطر کمبود صندلی، کمتر از ۱٪ باشد.

۳۳.۲ خانواده‌های با سه فرزند را در نظر بگیرید. فرض کنید دختر یا پسر بودن هر بچه به یک اندازه محتمل باشد.

الف) اگر یک چنین خانواده‌ای به تصادف انتخاب و معلوم شود که بزرگترین فرزندشان پسر است، احتمال اینکه دو بچه دیگر دختر باشد، چقدر است؟

ب) سؤال بند الف را برای حالتی جواب دهید که یک بچه به تصادف انتخاب شده از خانواده، پسر باشد.

پ) به جای انتخاب یک خانواده اکنون فرض کنید بچه‌ای به تصادف از بین کلیه بچه‌های چنین خانواده‌هایی

انتخاب می‌شود. اگر او پسر باشد، احتمال اینکه دو خواهر داشته باشد، چیست؟

ت) مانند بند پ خانواده‌ای را انتخاب و سپس دو بچه به تصادف از این خانواده انتخاب می‌کنیم. اگر آنها دختر باشند، احتمال اینکه برادری داشته باشند، چیست؟

۳۴.۲ یک تاس نااریب n بار پرتاب می‌شود. فرض کنید M و m ماکزیمم و می‌نیمم شماره‌های به دست آمده را نشان دهد. $P[m = ۲, M = ۵]$ را پیدا کنید. (راهنمایی: با $P[m \geq ۲, M \leq ۵]$ شروع کنید).

۳۵.۲ مشتری‌های یک سرویس خدماتی طبق فرآیند پواسن وارد یک صف انتظار می‌شوند به گونه‌ای که بین ورود هر دو نفر به طور متوسط دو دقیقه فاصله است.

الف) احتمال آنکه ۶ دقیقه بدون ورود مشتری سپری شود، چقدر است؟

ب) احتمال آنکه در یک فاصلهٔ ۶ دقیقه‌ای دست‌کم دو مشتری وارد شوند، چقدر است؟

۳۶.۲ در هر مورد تابع مولد گشتاور X را به دست آورید و بر پایه‌ی آن $E(X)$ و $V(X)$ را محاسبه کنید.

x

الف) $X \sim Bin(n, p)$،

ب) $X \sim Ge(p)$،

پ) $X \sim P(\lambda)$.

طرح‌های تحقیقی فصل دوم

۱.۲ یک باغدار گیلاس، برای فروش محصول آینده‌اش با یک کارخانه کمپوت قراردادی دارد. گیلاسها در سه سطح مرغوب (A)، نیمه مرغوب (B) و متوسط (C) درجه‌بندی خواهد شد. اگر محصول او مرغوب باشد، برای هر تن ۵۴۰۰۰۰ تومان دریافت می‌کند. قیمت هر تن گیلاس نیمه مرغوب و متوسط نیز بترتیب ۴۷۰۰۰۰ و ۳۹۰۰۰۰ تومان است. اگر جمع‌آوری محصول بموقع انجام شود احتمال‌های مربوط به سطوح کیفیت محصول عبارت‌اند از: $P(A) = ۰/۳۵$، $P(B) = ۰/۴۵$ و $P(C) = ۰/۲۰$. اگر محصول بموقع برداشت شود میزان مورد انتظار محصول ۶۱۰ تن است. اگر باغدار محصول خود را زودتر از موعد برداشت کند احتمال‌های بالا به $P(A) = ۰/۴۰$، $P(B) = ۰/۶۰$ و $P(C) = ۰$ تغیر می‌یابند، اما میزان محصول به ۵۷۰ تن کاهش می‌یابد.

الف) توزیع احتمال عایدی کل را تحت هریک از دو حالت زیر بیابید:

۱) برداشت محصول زودتر انجام شود. ۲) برداشت محصول بموقع انجام شود.

ب) کدامیک از دو حالت بند الف به امید بزرگتری برای عایدی کل منجر می‌شود؟ کدامیک به انحراف معیار بزرگتری از عایدی کل؟

۲.۲ تعداد نفت‌کش‌هایی که روزانه به پالایشگاهی می‌رسند از توزیع پواسن با میانگین ۲ پیروی می‌کند. تجهیزات پالایشگاه امکان رسیدگی به سه نفت‌کش در روز را فراهم می‌آورد، و نفت‌کش‌های مازاد بر سه دستگاه به محل دیگری فرستاده می‌شوند.

الف) احتمال آنکه در یک روز نفت‌کش یا نفت‌کش‌هایی به محل دیگر فرستاده شوند، چقدر است؟

ب) تجهیزات موجود چقدر توسعه یابد تا امکان رسیدگی به همه‌ی نفت‌کش‌ها در بیش از ۰/۹۵ از روزها فراهم باشد؟

پ) محتمل‌ترین تعداد نفت‌کش‌هایی که روزانه به پالایشگاه می‌رسد، چقدر است؟

ت) تعداد مورد انتظار نفت‌کش‌هایی که روزانه رسیدگی می‌شوند، چقدر است؟

ث) تعداد مورد انتظار نفت‌کش‌هایی که روزانه به محل دیگری فرستاده می‌شوند، چقدر است؟

۳.۲ در کارخانه‌ای یک نوع پوشاک تریکو تولید می‌شود. چنانچه وزن هر پوشاک از $۲۵۰(gr)$ کمتر باشد آن پوشاک در بخش کنترل رد می‌شود. تجربه نشان داده که چنانچه x گرم نخ در تولید هر پوشاک استفاده شود، وزن پوشاک تولید شده دارای توزیع نرمال با میانگین $۰/۹x$ گرم و انحراف معیار ۱۰ گرم

خواهد بود.

الف) فرض کنید $P(x)$ نسبت پوشاک‌های قابل قبولی باشد که x گرم نخ در تولید آن به کار رفته است. این نسبت را به ازای $x = ۲۹۰, ۲۹۵, ۳۰۰$ محاسبه کنید.

ب) چنانچه قیمت هر گرم نخ ۲۰ ریال و سایر هزینه‌های تولید هر پوشاک (هزینه بافت، رنگرزی، ...) برابر ۴۵۰۰۰ ریال باشد و هزینه تولید پوشاک معیوب روی تولید نامعیوب پخش گردد، نشان دهید که متوسط هزینه یک پوشاک قابل قبول وقتی که x گرم نخ در تولید آن به کار رود برابر است با (برحسب ریال)

$$C(x) = \frac{۴۵۰۰۰ + ۲۰x}{P(x)}$$

پ) مقدار x را که منجر به کمترین هزینه می‌شود، بیابید.

۴.۲ در بستر یک رودخانه نسبت سنگ‌هایی که از نوع رسوبی‌اند p است. فرض کنید در نمونه‌ای مرکب از ۲۰ سنگ که به تصادف از نقاط مختلف بستر رود جمع‌آوری شده‌اند، $x = ۱۲$ سنگ از این نوع بوده‌اند.

الف) با استفاده از جدول دوجمله‌ای، احتمال مشاهده فوق را به ازای

$$p = ۰/۱, ۰/۲, ۰/۳, ۰/۴, ۰/۵, ۰/۶, ۰/۷, ۰/۸, ۰/۹$$

حساب کنید. احتمال را به عنوان تابعی از پارامتر p، به صورت نقطه‌هایی نشان دهید و این نقاط را با استفاده از منحنی همواری به هم وصل کنید.

ب) از روی نموداری که به دست می‌آورید برآورد مناسبی را برای p، در نقطه‌ی بیشینه‌ی منحنی، به دست آورید.

توجه: مقدار نامعلوم پارامتر p را می‌توان با استفاده از داده‌های نمونه برآورد کرد. روش فوق‌الذکر مقداری را برای پارامتر برآورد می‌کند که احتمال داده‌های مشهود را بیشینه می‌سازد. این روش را روش ماکزیمم درستنمایی می‌نامند. مثلاً برای توزیع دوجمله‌ای، از روی محاسبات ریاضی می‌توان نشان داد که $\hat{p} = x/n$ ($\hat{p}$: برآورد پارامتر مجهول p).

۵.۲ یک کارخانه شیشه‌سازی برای ساخت دو عدسی بزرگ، که باید به صورتی ویژه قالب‌ریزی شوند، سفارشی دریافت کرده است. احتمال اینکه عدسی، وقتی شیشه سرد شد، مورد تأیید قرار گیرد (یعنی بری از نقص باشد) مساوی ۰/۶ است. مدیر کارخانه می‌خواهد بداند در یک نوبت، چند عدسی را باید قالب‌ریزی

کرد که با احتمال حداقل ۰/۹۵، دست‌کم دو عدسی قابل قبول باشند. کمترین تعداد عدسی‌هایی را که باید در یک نوبت قالب‌ریزی شوند تا این اطمینان به دست آید، بیابید.

۶.۲ تعداد تاکسی‌های یک شرکت تاکسیرانی که در روز به علت خرابی کار نمی‌کنند متغیر تصادفی پواسون X با $\lambda = ۰/۷$ است. زیان شرکت بر اثر خرابی یک تاکسی در روز، اگر جانشینی برای آن نباشد، ۱۰۰ (هزار ریال) و اگر جانشینی برای آن باشد صفر است. تاکسی‌های خراب را می‌توان برای روز بعد تعمیر کرد. تاکسی‌های ذخیره (بدون راننده) را می‌توان در ازای روزی ۳۵ (هزار ریال) اجاره کرد. احتمال خرابی یک تاکسی جانشین به صورتی قابل اغماض کوچک است.

الف) فرض کنید C زیان روزانه به علت خرابی‌ها به علاوه‌ی هزینه اجاره باشد، و m تعداد تاکسی‌های ذخیره را که در روز اجاره می‌شوند نشان دهد. C را بر حسب تابعی از X و m بیان کنید.

ب) به ازای $m = ۰, ۱, ۲, ۳$، مقدار $E(C)$ را محاسبه نمایید.

پ) شرکت برای اینکه امید مقدار C را مینیمم کند، باید در آغاز روز چند تاکسی ذخیره آماده داشته باشد؟

۷.۲ سفینه‌های بدون سرنشین پیاپی به فضا فرستاده می‌شوند تا زمانی که اولین پرتاب موفق صورت گیرد. اگر با پنج آزمایش اول موفقیت حاصل نشود، آزمایش‌ها متوقف می‌شود تا دستگاهها مورد بررسی قرار گیرند. فرض کنید که آزمایش‌های پیاپی مستقل از هم هستند و احتمال موفقیت هر آزمایش ثابت و برابر ۰/۸ است. فرض کنید که هزینه آزمایش اول معادل K واحد پول و هزینه آزمایش‌های بعد معادل $K/۳$ واحد پول است. با اولین پرتاب موفقیت‌آمیز، مقداری اطلاعات به دست می‌آید که از لحاظ مالی معادل C واحد پول است. اگر هر پنج آزمایش به شکست بیانجامند، سودی از این رهگذر عاید نمی‌شود.

الف) N را معرف تعداد آزمایش‌هایی بگیرید که تا کسب اولین موفقیت انجام می‌شوند. توزیع احتمال N، یعنی

$$P\{N = ۱\}\ ,\ P\{N = ۲\}\ ,\ P\{N = ۳\}\ ,\ P\{N = ۴\}\ ,\ P\{N = ۵\}\ ,\ P\{N > ۵\}$$

را پیدا کنید. توجه دارید که $P\{N > ۵\}$ احتمال متوقف شدن آزمایش‌ها بدون کسب موفقیت است.

ب) اگر متغیر تصادفی T معرف هزینه خالص این تجربه باشد، تابع احتمال T را پیدا کنید.

پ) $E(T)$ را پیدا کنید.