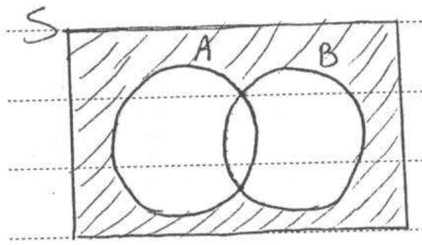
مثال ۱: در تصویر زیر کدام بخش هاشور خورده است؟



الف) $A \cup B$ ب) $A \cup B'$

ج) $A' \cap B'$ د) $A - B'$

مثال: احتمال اینکه مردی تا ده سال دیگر زنده بماند ۱/۵ و همین احتمال برای همسر او ۱/۴ است. مطلوب است احتمال اینکه:

الف) هر دو تا ۱۰ سال دیگر زنده بمانند.

$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$

ب) لااقل یکی از آنها تا ۱۰ سال دیگر زنده باشد.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{20} = \frac{5+4-1}{20} = \frac{8}{20}$

ج) هیچکدام تا ۱۰ سال دیگر زنده نباشند.

$P(A' \cap B') = 1 - \frac{8}{20} = \frac{12}{20}$ یا $\left(1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{20}\right)\right) = \frac{12}{20}$

احتمال شرطی: گاهی اوقات اطلاع از وقوع یک پیشامد یا عدم وقوع بر وقوع یک پیشامد جدید تأثیر گذاشته و احتمال وقوع آن را کم یا زیاد می کند. به عنوان مثال در آزمایش پرتاب یک تاس اگر بدانیم عدد به دست آمده زوج است آنگاه این اطلاع پیش باعث می گردد که احتمال وقوع پیشامد $\{2\}$ از ۱/۶ به ۱/۳ افزایش یابد. همچنین احتمال وقوع پیشامد $\{3\}$ از ۱/۶ به صفر کاهش می یابد.

احتمال $P(A|B)$ احتمال وقوع پیشامد A با شرط اینکه می دانیم پیشامد B حتماً رخ داده است نامیده و برابر است با:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$= \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ اگر اعضای S هم شانس باشند

حذف

قانون ضرب احتمال: $P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B) = \boxed{P(B|A)\,P(A)}$

۳ → ۲ ، ۱

$\frac{3!}{2!} = 3$

A_1A_2 A_1A_3 A_2A_3

A_3 A_2 A_1

Subject:
Year. Month. Date. ۱۸

تعمیم ۱:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_2 \cap A_1) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

مثال: در ظرفی ۵ مهره ی قرمز، ۶ مهره ی سبز و ۴ مهره ی سفید داریم. از این ظرف ۵ مهره به تصادف خارج می کنیم. احتمال اینکه اولی قرمز، دومی سبز، سومی قرمز و چهارمی سفید و پنجمی سبز باشد را در دو حالت با جایگذاری و بدون جایگذاری به دست آورید.

۵R
۶G
۴W

با جایگذاری:

$$P(RGRWG) = P(R)\,P(G)\,P(R)\,P(W)\,P(G) = \frac{5}{15} \times \frac{6}{15} \times \frac{5}{15} \times \frac{4}{15} \times \frac{6}{15}$$

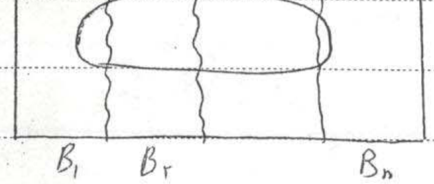
بدون جایگذاری:

P(RGRWG) = P(اولی قرمز) P(دومی سبز | اولی قرمز) P(سومی قرمز | اولی قرمز و دومی سبز) × P(چهارمی سفید | اولی قرمز و دومی سبز و سومی قرمز) × P(پنجمی سبز | اولی قرمز و دومی سبز و سومی قرمز و چهارمی سفید)

$$= \frac{5}{15} \times \frac{6}{16} \times \frac{4}{13} \times \frac{4}{12} \times \frac{5}{11}$$

باید بشود ۱۴؟

قانون احتمال کل: هرگاه فضای نمونه ی S را به n پیشامد مجزای $B_1, B_2, \dots, B_n$ تقلیل (افراز) کنیم، آنگاه احتمال وقوع هر پیشامد دلخواه A به صورت زیر محاسبه می گردد:



(صفحه ی بعدی)

$B_i \cap B_j = \emptyset \qquad \bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+\dots+P(A\cap B_n)$$

قانون ضرب $\Rightarrow P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\dots+P(A|B_n)P(B_n)$

$$=\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\,P(B_i)$$

توماس بیز (۱۷۰۲-۱۷۶۰) کشیش و فیلسوف انگلیسی

قانون بیز: از ترکیب قانون ضرب احتمال و قانون احتمال کل، احتمال وقوع B_k با شرط اینکه A رخ داده است برابر است:

$$P(B_k|A)=\frac{P(A|B_k)\,P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\,P(B_i)}$$

$$\frac{P(A\cap B_k)}{P(A)}$$

مثال: یک مؤسسه‌ی مشاوره‌ای ماشین‌های مورد نیازش را از ۳ آژانس تهیه می‌کند. اگر درصد ماشین‌های تهیه شده از آژانس‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب ۲۰، ۲۰ و ۶۰ درصد باشند، به طوری که ۱۰ درصد از ماشین‌های آژانس ۱ معیوب، ۱۲ درصد از آژانس ۲ معیوب و ۴ درصد از ماشین‌های آژانس ۳ معیوب می‌باشد. مطلوب است محاسبه‌ی:

الف) احتمال اینکه ماشین کرایه شده معیوب باشد

ب) اگر بدانیم ماشین کرایه شده توسط مؤسسه معیوب است. احتمال اینکه از آژانس ۳ کرایه شده باشد را به دست آورید.

$1 \longrightarrow 20 \xrightarrow{\text{معیوب}} 10$

$2 \longrightarrow 20 \longrightarrow 12$

$3 \longrightarrow 60 \longrightarrow 4$

A: پیشامد اینکه ماشین کرایه شده معیوب است.

B_i: پیشامد اینکه ماشین کرایه شده از آژانس iام کرایه شده باشد.

۸ معلم
۴ مدرسه $\xrightarrow{\text{به هر مدرسه حداقل}}$ یک معلم

$$\frac{(8)_4\,4^4}{4^8}=\frac{\frac{8!}{4!}}{4^4}=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times4\times4\times4}$$

غ

Subject:
Year. Month. Date. ۱۹

الف) $P(A) = P(A|B_1)\,P(B_1) + P(A|B_2)\,P(B_2) + P(A|B_3)\,P(B_3)$

$$= \frac{10}{100} \times \frac{20}{100} + \frac{12}{100} \times \frac{20}{100} + \frac{4}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{68}{1000}$$

ب) $P(B_3|A) = \dfrac{P(A|B_3)\,P(B_3)}{P(A)} = \dfrac{\frac{4}{100} \times \frac{60}{100}}{\frac{68}{1000}} = \dfrac{24}{68} = \dfrac{12}{34} = \dfrac{6}{17} = 0.35$

دو پیشامد مستقل: دو پیشامد A و B را مستقل گوییم، هرگاه وقوع یکی بر دیگری تأثیر نداشته باشد و یا به عبارت دیگر:

$P(A|B) = P(A)$

یا (اطلاع از وقوع یکی در دیگری تأثیر ندارد)

$P(B|A) = P(B)$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

هرگاه A و B مستقل باشند، آنگاه می‌توان نوشت:

1) $P(A' \cap B) = P(A')\,P(B)$

2) $P(A \cap B') = P(A)\,P(B')$

3) $P(A' \cap B') = P(A')\,P(B')$

بررسی شود

مثال: یک زوج تاس را پرتاب می‌کنیم تا جمع ۵ یا ۷ ظاهر شود. احتمال اینکه مجموع ۵ ابتدا ظاهر شود را به دست آورید.

$E_n \Rightarrow$ پیشامد اینکه مجموع ۵ در پرتاب nام ظاهر شود و در (n-1) پرتاب اول ۵ یا ۷ ظاهر نشده باشد.

مجموع ۵ : $A=\{(1,4)\ (4,1)\ (2,3)\ (3,2)\}$

مجموع ۷ : $B=\{(2,5)\ (5,2)\ (1,6)\ (6,1)\ (3,4)\ (4,3)\}$

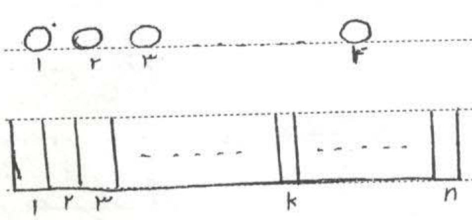
$P(E_1)=\frac{4}{36}$ $\quad P(E_2)=\left[1-P(A)-P(B)\right]P(A)=\left(\frac{26}{36}\right)\left(\frac{4}{36}\right)$

$P(E_3)=\left[1-P(A)-P(B)\right]^2P(A)$ ...... $P(E_n)=\left[1-P(A)-P(B)\right]^{n-1}P(A)$

P(مجموع ۵ زودتر از مجموع ۷ ظاهر شود) $=P(E_1)+P(E_2)+\dots=\frac{4}{36}\left[1+\frac{26}{36}+\left(\frac{26}{36}\right)^2+\dots\right]\rightarrow$

$=\dfrac{\frac{4}{36}}{1-\frac{26}{36}}=\dfrac{\frac{4}{36}}{\frac{10}{36}}=0/4$

نکته ← تعداد حالت های قرار دادن n توپ متمایز در r جعبه متمایز برابر است با:



$\underbrace{\cancel{n\times n\times n\times\cdots\times n}}_{r\text{ تا}}=\cancel{n^r}$

تعداد حالت های قرار دادن توپ اول در جعبه

$r\times r\times\cdots\times r=r^n$

نکته ← در صورتی که توپ ها مشابه باشند تعداد حالت های قرار دادن این n توپ در r جعبه متمایز مانند حل معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+\dots+x_r=n$ و یافتن تعداد جواب های صحیح و نامنفی این معادله است.

$x_1\geq 0 \ \dots\dots\ x_r\geq 0$

$\binom{n+r-1}{r-1}\longrightarrow$ تعداد جواب های صحیح و نامنفی

چنانچه لازم باشد در هر جعبه حداقل یک توپ قرار بگیرد، آنگاه تعداد حالت های ممکن برابر است با جواب های صحیح و مثبت معادله‌ی زیر:

مثال: ۸ معلم را می‌خواهیم به ۴ مدرسه تقسیم کنیم. چقدر احتمال دارد که به هر مدرسه حداقل یک معلم برسد؟

$n(S)=4^8$, $P(A)=1-\left[\binom{4}{1}\frac{3^8}{4^8}-\binom{4}{2}\frac{2^8}{4^8}+\binom{4}{3}\frac{1^8}{4^8}\right]\rightarrow$

حداقل به یک مدرسه معلم نرسد

Subject:
Year. Month. Date. ۲۵

$x_1+x_2+\dots+x_r=n$ $\qquad \binom{n-1}{r-1} \longrightarrow$ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی

$x_1>0 \dots x_r>0$

مثال: می‌خواهیم ۲۰ میلیون تومان را در ۴ فعالیت اقتصادی سرمایه‌گذاری کنیم. هر سرمایه‌گذار باید مضربی از یک میلیون تومان بوده و چنانچه بخواهیم در این فعالیت‌ها سرمایه‌گذاری کنیم لازم است، حداقل سرمایه‌گذاری به ترتیب ۲، ۲، ۳ و ۴ میلیون تومان در ~~هر فعالیت~~ این فعالیت‌ها انجام شود. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است اگر:

الف) بخواهیم در همه‌ی فعالیت‌ها سرمایه‌گذاری کنیم.

ب) بخواهیم در حداقل ۳ فعالیت سرمایه‌گذاری کنیم.

الف) $x_1+x_2+x_3+x_4=20 \qquad x_1\geq 2,\ x_2\geq 2,\ x_3\geq 3 \quad x_4\geq 4$

$(x_1-2)+(x_2-2)+(x_3-3)+(x_4-4)=20-2-2-3-4$

$y_1+y_2+y_3+y_4=9 \qquad y_i\geq 0$

$\binom{9+4-1}{4-1}=\binom{12}{3}=\dfrac{\overset{2}{\cancel{12}}\times 11\times 10\times \cancel{9!}}{\cancel{9!}\times \underbrace{3!}_{3\times 2=6}}=220$

ب) $x_1+x_2+x_3=20 \longrightarrow y_1+y_2+y_3=20-2-2-3=13$

$x_1+x_3+x_4=20 \longrightarrow y_1+y_3+y_4=11$

$x_1+x_2+x_4=20 \longrightarrow y_1+y_2+y_4=12$

$x_2+x_3+x_4=20 \longrightarrow y_2+y_3+y_4=11$

$x_1+x_2+x_3+x_4=20 \longrightarrow y_1+y_2+y_3+y_4=9$

تعداد حالات کل $\Longrightarrow \binom{13+3-1}{3-1}+\binom{11+3-1}{3-1}+\binom{12+3-1}{3-1}+\binom{11+3-1}{3-1}+\binom{9+4-1}{4-1}$

$=\underbrace{\binom{15}{2}}_{105}+\underbrace{\binom{13}{2}}_{78}+\underbrace{\binom{14}{2}}_{91}+\underbrace{\binom{13}{2}}_{78}+\underbrace{\binom{12}{3}}_{220}=572$

چقدر احتمال دارد که به هر مدرسه دقیقاً دو معلم برسد؟

$\dfrac{\dfrac{8!}{(2!)^4}}{4^8}$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

بررسی شود

تمرین: در یک بازی، بازیکنی ۲ تاس را پرتاب می‌کند. اگر مجموع ۲ عدد ظاهر شود ۲، ۳ یا ۱۲ باشد، بازنده است و اگر مجموع ۷ یا ۱۱ باشد برنده است. اگر نتیجه عدد دیگری باشد بازی ادامه پیدا می‌کند تا اینکه نتیجه قبلی را به دست آورد و یا نتیجه ۷ حاصل شود. چنانچه نتیجه ۷ ظاهر شود بازیکن بازنده است و اگر نتیجه قبلی ~~پیش~~ از ۷ ظاهر شود بازیکن برنده است. احتمال برنده شدن این بازیکن را حساب کنید. ۰/۴۹۱

۲ → بازنده
۳ → بازنده
۴
۵
۶
۷ → برنده
۸
۹
۱۰
۱۱ → برنده
۱۲ → بازنده

مثال: یک تیم بسکتبال ۳ نفره، شامل یک مدافع، یک نفر خط حمله و یک نفر در مرکز است. اگر از هر یک از سه تیم با ترکیب فوق یک نفر به تصادف انتخاب شود

الف) احتمال اینکه یک تیم کامل انتخاب شود را به دست آورید.

ب) احتمال اینکه هر ۳ نفر انتخاب شده بازیکن یک موقعیت باشند را بیابید.

تعداد کل حالات $\Rightarrow \binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{3}{1} = 27$

الف) $\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{27} = \frac{6}{27} = 2/9$

ب) $\frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{27} = \frac{3}{27} = 1/9$

مثال: یک گروه از افراد شامل ۵ پسر و ۹ دختر به تصادف در یک ردیف می‌نشینند. احتمال اینکه فرد قرار گرفته در موقعیت i ام دختر باشد را به دست آورید.

۶۲۵

میثاقی حسین زاده
جاجی قاسمی
شیرازی
عطاری
کوشش
صمدیان
لطفی
عربی
داوری

Subject:
Year. Month. Date.

$\underset{1\ 2}{|\,|\,|} \cdots \underset{i}{|g|} \cdots \underset{b+g}{|\,|}$

بنا بر این گذاریم و تعداد حالت های ممکن را با این اعضا به دست می آوریم

$$\frac{(b+g-1)!\binom{g}{1}}{(b+g)!} = \frac{g}{b+g}$$

حل بررسی شود.

تمرین: شهری ۴ تعمیرکار تلویزیون دارد. اگر ۴ تلویزیون خراب داشته باشیم، به چند طریق می توان (با چه احتمالی) دقیقاً به i تعمیرکار مراجعه می شود؟ (مسئله را برای i=1,...,4 و در دو حالت مشابه و غیرمشابه بودن تلویزیون ها حل کنید)

تلویزیون غیرمشابه ← $\underbrace{n\times n\times n\times n\times \cdots \times n}_{r} = n^r \Rightarrow 4^4 = 4\times4\times4\times4 = 256$

تلویزیون مشابه ← $\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{4+4-1}{4-1} = \binom{8-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7\times6\times5\times4!}{3!4!} = 35$

مثال: یک مؤسسه بیمه افراد را به سه گروه با ریسک بالا، ریسک متوسط و ریسک پایین تقسیم بندی می کند. اطلاعات این مؤسسه نشان می دهد که احتمال تصادف کردن افراد با ریسک بالا ۳۰٪، ریسک متوسط ۱۵٪ و ریسک پایین ۵٪ است. اگر ۲۰٪ از افراد جامعه ریسک بالا، ۵۰٪ ریسک متوسط و ۳۰٪ دارای ریسک پایین باشند، چه نسبتی از افراد جامعه در یک سال تصادف می کنند. اگر فرد بیمه شده‌ی A در یک سال تصادف نداشته باشد، احتمال اینکه او متعلق به افراد با ریسک بالا باشد چقدر است؟

۲۰٪ ریسک بالا —احتمال تصادف→ ۳۰٪
۵۰٪ ریسک متوسط → ۱۵٪
۳۰٪ ریسک پایین → ۵٪

A: پیشامد تصادف یک فرد خاص در طول سال

$P(A) = P(A|①)P(①) + P(A|②)P(②) + P(A|③)P(③)$

$= \frac{30}{100}\times\frac{20}{100} + \frac{15}{100}\times\frac{50}{100} + \frac{5}{100}\times\frac{30}{100} = \frac{15}{100}$

$P(X=1) = \frac{\binom{4}{1}}{4^4} = \frac{1}{64}$

$P(X=2) = \frac{\binom{4}{2}\left[2^4-2\right]}{4^4} = \frac{6\times14}{4^4} = \frac{21}{64}$

$P(X=3) = \frac{\binom{4}{3}\left[3^4-\binom{3}{2}(2^4-2)-\binom{3}{1}\right]}{4^4} = \frac{4(81-42-3)}{4^4} = \frac{36}{64}$

$P(X=4) = \frac{4!}{4^4} = \frac{6}{64}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

چرا ۸۵؟ نباید ۸۰ بشود $1-\frac{30}{100}$ ؟

ب) $P(1|A') = \dfrac{P(A'|1)\,P(1)}{P(A')} = \dfrac{\frac{70}{100}\times\frac{20}{100}}{1-\frac{15}{100}} = \dfrac{14}{85}$

مثال: ۷ جایزه را می‌خواهیم بین ۱۰ دانش آموز تقسیم کنیم. اگر هیچ دانش آموزی بیش از یک جایزه نگیرد به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

انتخاب ۷ نفر از ۱۰ نفر

$\binom{10}{7}\times 7!$ ← تقسیم ۷ جایزه بین ۷ نفر

مثال: به چند طریق می‌توان ۱۲ نفر را به ۳ شورای ۴ نفره که اولی برای مدیریت، دومی برای حفاظت و سومی را برای امور مالی می‌باشد تقسیم نمود؟

ب) به چند طریق می‌توان این ۱۲ نفر را به ۳ گروه ۴ نفره تقسیم نمود.

الف) $\dfrac{12!}{4!\,4!\,4!}$ راه دوم ← $\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}$

ب) $\dfrac{12!}{4!\,4!\,4!\,3!}$ ← ترتیب گروه مهم نیست ممکن است هر گروه ۳ پست را بپذیرد.

بررسی شود

مثال: ۲۰ نفر را در نظر بگیرید احتمال اینکه در ۱۲ ماه سال ۴ ماه هر کدام ۲ تولد و ۴ ماه هر کدام ۳ تولد داشته باشد را بیابید.

$\frac{12!}{4!\,8!}\times\frac{20!}{8!\,12!}$ ترتیب مهم است بین ۸ نفر تقسیم می‌کنیم ۸ انتخاب ماه $\frac{8!}{4!\,4!}$

$n(S) = 12^{20}$

$n(A) = \binom{12}{4}\binom{20}{8}\times\dfrac{8!}{2!\,2!\,2!\,2!}\times\dots\times\binom{8}{4}\times\dfrac{12!}{3!\,3!\,3!\,3!}$

$\frac{12!}{4!\,8!}\times\frac{20!}{8!\,12!}\times\frac{8!}{4!\,4!}$

تقسیم به ۴ گروه ۲ نفری و ترتیب مهم

$\dfrac{20!}{(2!)^4\,(3!)^4}\times\dfrac{12!}{4!\,4!\,4!}$ ؟ $\dfrac{20!}{(2!)^4\,(3!)^4}$ یعنی تقسیم ۲۰ نفر به ۴ گروه ۲ نفره و ۴ گروه ۳ نفره

مثال: ۱۰ وزنه بردار در یک مسابقه شرکت دارند به طوری که ۳ نفر از آنها آمریکایی، ۴ نفر روسی، ۲ نفر چینی و یک نفر کانادایی هستند. اگر امتیاز کسب شده به نام کشور وزنه بردار

و سپس قرار دادن این ۸ گروه در ۸ ماه انتخابی از ۱۲ ماه یعنی ضرب در $\binom{12}{8}\times 8!$

PAPCO

جواب صحیح: $\dfrac{12!}{4!\,8!}\times\dfrac{20!}{8!\,12!}\times\dfrac{8!}{(2!)^4}\times\dfrac{8!}{4!\,4!}\times\dfrac{12!}{(3!)^4} = \dfrac{20!\,12!}{(2!)^4\,(3!)^4\,(4!)^3}$